ONO SOKKI

計測コラム　　emm68 号用

## 波形と FFT－6

### 6. フーリエ級数・フーリエ変換

#### （1）　フーリエ級数　フーリエ係数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$
$$=\sum_{m=0}^{M}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$
$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mx\,dx$$
$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\,dx$$

#### （2）1 周期を T としたフーリエ級数　フーリエ係数

上記（1）の $x$ を $x=2\pi ft = \omega t$、1 周期 $2\pi = T$ と置き換えて；

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t+a_2\cos 2\omega t+b_2\sin 2\omega t+\cdots$$
$$=\sum_{m=0}^{M}(a_m\cos m\omega t+b_m\sin m\omega t)$$

$$a_m=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(t)\cos m\omega t\,dt \qquad m=0、1、\cdots$$
$$b_m=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(t)\sin m\omega t\,dt \qquad m=0、1、2、\cdots$$

#### （3）複素フーリエ級数・複素フーリエ係数

オイラーの公式

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$
$$\sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

を考慮して（2）は；

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{M}\left\{\frac{1}{2}(a_m-j\,b_m)e^{jm\omega t}+\frac{1}{2}(a_m+j\,b_m)e^{-jm\omega t}\right\}$$

$$=\sum_{m=-M}^{M}C_m e^{jm\omega t}\qquad M\to\infty$$

$$C_0=\frac{a_0}{2}\quad、\quad C_m=\frac{a_m-j\,b_m}{2}\quad、\quad C_{-m}=\frac{a_m+j\,b_m}{2}$$

$$C_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-jm\omega t}dt$$

＜補足＞

$$C_{-m}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j(-m)\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{jm\omega t}dt$$

**一方、$f(t)$は実関数なので**

$$C_m{}^{*}=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-jm\omega t}dt\right)^{*}=\frac{1}{T}\int_0^T f^{*}(t)\left(e^{-jm\omega t}\right)^{*}dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{jm\omega t}dt$$

**よって**

$$C_{-m}=C_m{}^{*}$$

実関数の複素フーリエ係数は $C_m$、$m=1$ ～ $M$ を計算すれば、あとは複素共役 $C_m{}^{*}$ をとればよいことになります。

なお、$C_m$の実数部と虚数部は、複素フーリエ級数展開することにより、正負の周波数成分にわかれ、フーリエ係数 $a_m$、$b_m$ の 1/2となります。

## （4）フーリエ変換、フーリエ逆変換

T を無限大に拡大することで、周期性のない波形【非周期関数】でもフーリエ級数に展開できるようにしたものです。

フーリエ係数 $C_m$ を求める式も 1 つの関数と考え、これをフーリエ変換といいます。

$f$ (t)はフーリエ変換の逆の計算をする関数と考えて、フーリエ逆変換といい、フーリエ変換、フーリエ逆変換を一対の式として考えます。

### フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$=\mathrm{Re}[F(\omega)]+j\,\mathrm{Im}[F(\omega)]$$

### フーリエ逆変換

$$f(t)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

**実部** Re、**虚部** Im**は**

$$\mathrm{Re}[\mathrm{F}(\omega)]=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

$$\mathrm{Im}[F(\omega)]=-\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

## （5）離散的フーリエ変換　フーリエ逆変換

実用性を考えると T は有限をとることになります。また、FFT アナライザでは AD 変換してサンプリングされたデータ列の有限個 N をとり、フーリエ変換が実行されます。サンプリングすると【離散的】（連続していない飛び飛びの値）になりますから、T = Nh（h はサンプリング間隔の時間）より T の代わりに N 個とすると、離散的フーリエ変換、フーリエ逆変換の第 k 項を考える（周波数は $k\omega$ になるので）。

$\int_{-\infty}^{\infty}$ は $\sum_{n=0}^{N-1}$ 、t は nh に置き換えて；

$$F(k\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)e^{-jk\omega nh}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)\cos k\omega nh-j\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)\sin k\omega nh$$

$$f_k(nh)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(k\omega)e^{jk\omega nh}$$

**実部** Re　**、虚部** Im**は**

$$\mathrm{Re}[F(k\omega)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)\cos k\omega nh$$

$$\mathrm{Im}[F(k\omega)]=-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)\sin k\omega nh$$

## （6）離散的フーリエ級数、フーリエ係数

サンプリングされた離散値でフーリエ係数を求めるには、上記（5）を展開して次式で計算します。フーリエ級数、フーリエ係数と実部、虚部の関係を対比して記します。

＜フーリエ級数、フーリエ係数＞

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} (a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t)
\end{aligned}
$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos m\omega t dt \qquad m = 0、1、\cdots$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin m\omega t dt \qquad m = 0、1、2、\cdots$$

**第$k$項のフーリエ係数は；**

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh) \cos k\omega nh$$

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh) \sin k\omega nh$$

第 $k$ 項のフーリエ変換をフーリエ係数 $a_n$、$b_n$ に一致するように 2/N で考えると；

$$F(k\omega) = \mathrm{Re}[F(k\omega)] + j\,\mathrm{Im}[F(k\omega)]$$

$$\mathrm{Re}[F(k\omega)] = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh) \cos k\omega nh = a_k$$

$$\mathrm{Im}[F(k\omega)] = -\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh) \sin k\omega nh = -b_k$$

第 $k$ 項のフーリエ係数の式または Re [ $F$ ($k\omega$) ]、Im [$F$ ($k\omega$)]の式を使うと表計算ソフトで計算することができます。

$\omega = 2\pi f_o$ の $f_o$ は 1 周期 T の逆数です。T = Nh、N はサンプル数、h はサンプル時間間隔ですから、h が一定なら N は周波数分解能 $f_o$ に関係します。

## （7）フーリエ係数の計算例

前号で 10Hz と 20Hz の cos を合成した；

$$f(t) = f(nh) = \cos\left(20\pi\, n\, h + \theta\right) + \cos\left(40\pi\, n\, h + \phi\right)$$
$$\theta = 30\,(\mathrm{deg}) = \frac{30 \times 2\pi}{360} \quad (rad)$$
$$\phi = 45\,(\mathrm{deg}) = \frac{45 \times 2\pi}{360} \quad (rad)$$

のサンプルデータを作ってみました。
$f(t)$の式から時系列データを作り、$f(t)$の 10Hz のフーリエ係数の計算をするにあたり、次のような数値を代入し計算してみましょう。

- サンプル周波数 1000Hz、
- サンプル時間ｈ = 1/1000 (s)、
- サンプル数 N = 2048
- t = nh
- n = 0、1、2、･･･2047

として
n、nh、$f$(nh)、cos (20π nh)、sin (20π nh)、$f$(nh) cos (20π nh)、$f$(nh) sin (20π nh)を順に A ～ G 列で計算します。
そして；

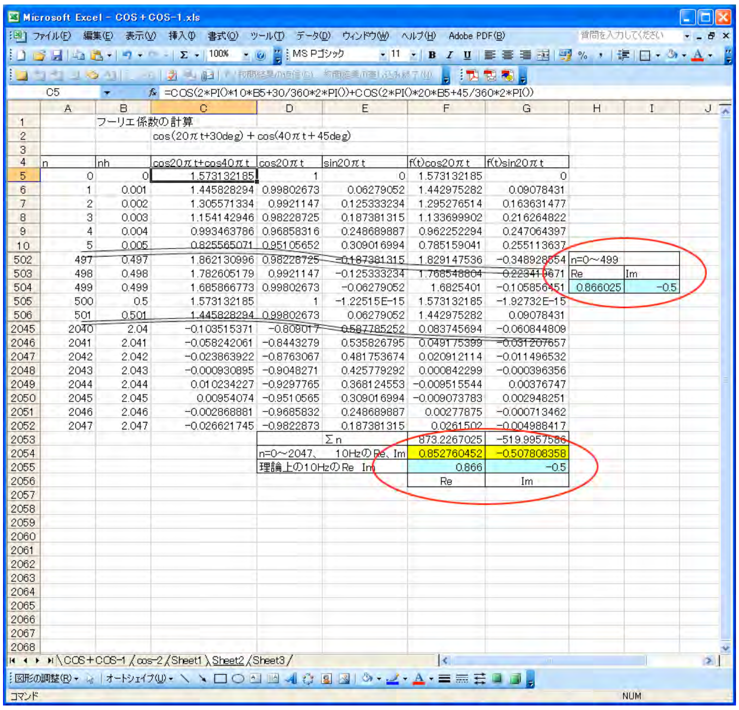
$$a\,(10Hz) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)\cos(20\pi nh)$$ **（F列の合計から計算する ）**

$$b\,(10Hz) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)\sin(20\pi nh)$$ **（G列の合計から計算する ）**

にて 10Hz のスペクトル a､b を N = 500（n = 0 ～ 499）と N = 2048（n = 0 ～ 2047）の場合を求めると；

| | | |
|---|---|---|
| N = 500（Nh = 0.5s）の場合 | a = 0.866 | b = -0.500 |
| N = 2048（Nh = 2.048s）の場合 | a = 0.853 | b = -0.508 |

Microsoft-EXCEL での計算の様子


Microsoft Excel - COS＋COS-1.xls

C5 =COS(2*PI()*10*B5+30/360*2*PI())+COS(2*PI()*20*B5+45/360*2*PI())

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | フーリエ係数の計算 | | | | | | | |
| 2 | | | cos(20πt+30deg) + cos(40πt + 45deg) | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | n | nh | cos20πt+cos40πt | cos20πt | sin20πt | f(t)cos20πt | f(t)sin20πt | | |
| 5 | 0 | 0 | 1.573132185 | 1 | 0 | 1.573132185 | 0 | | |
| 6 | 1 | 0.001 | 1.445828294 | 0.99802673 | 0.06279052 | 1.442975282 | 0.09078431 | | |
| 7 | 2 | 0.002 | 1.305571334 | 0.9921147 | 0.125333234 | 1.295276514 | 0.163631477 | | |
| 8 | 3 | 0.003 | 1.154142946 | 0.98228725 | 0.187381315 | 1.133699902 | 0.216264822 | | |
| 9 | 4 | 0.004 | 0.993463786 | 0.96858316 | 0.248689887 | 0.962252294 | 0.247064397 | | |
| 10 | 5 | 0.005 | 0.825565071 | 0.95105652 | 0.309016994 | 0.785159041 | 0.255113637 | | |
| 502 | 497 | 0.497 | 1.862130996 | 0.98228725 | -0.187381315 | 1.829147536 | -0.348928654 | n=0～499 | |
| 503 | 498 | 0.498 | 1.782605179 | 0.9921147 | -0.125333234 | 1.768548804 | -0.223419671 | Re | Im |
| 504 | 499 | 0.499 | 1.685866773 | 0.99802673 | -0.06279052 | 1.6825401 | -0.105856451 | 0.866025 | -0.5 |
| 505 | 500 | 0.5 | 1.573132185 | 1 | -1.22515E-15 | 1.573132185 | -1.92732E-15 | | |
| 506 | 501 | 0.501 | 1.445828294 | 0.99802673 | 0.06279052 | 1.442975282 | 0.09078431 | | |
| 2045 | 2040 | 2.04 | -0.103515371 | -0.809017 | 0.587785252 | 0.083745694 | -0.060844809 | | |
| 2046 | 2041 | 2.041 | -0.058242061 | -0.8443279 | 0.535826795 | 0.049175399 | -0.031207657 | | |
| 2047 | 2042 | 2.042 | -0.023863922 | -0.8763067 | 0.481753674 | 0.020912114 | -0.011496532 | | |
| 2048 | 2043 | 2.043 | -0.000930895 | -0.9048271 | 0.425779292 | 0.000842299 | -0.000396356 | | |
| 2049 | 2044 | 2.044 | 0.010234227 | -0.9297765 | 0.368124553 | -0.009515544 | 0.00376747 | | |
| 2050 | 2045 | 2.045 | 0.00954074 | -0.9510565 | 0.309016994 | -0.009073783 | 0.002948251 | | |
| 2051 | 2046 | 2.046 | -0.002868881 | -0.9685832 | 0.248689887 | 0.00277875 | -0.000713462 | | |
| 2052 | 2047 | 2.047 | -0.026621745 | -0.9822873 | 0.187381315 | 0.0261502 | -0.004988417 | | |
| 2053 | | | | | Σn | 873.2267025 | -519.9957586 | | |
| 2054 | | | | n=0～2047、 | 10HzのRe、Im | 0.852760452 | -0.507808358 | | |
| 2055 | | | | 理論上の10HzのRe Im | | 0.866 | -0.5 | | |
| 2056 | | | | | | Re | Im | | |

COS＋COS-1 / cos-2 / Sheet1 / Sheet2 / Sheet3

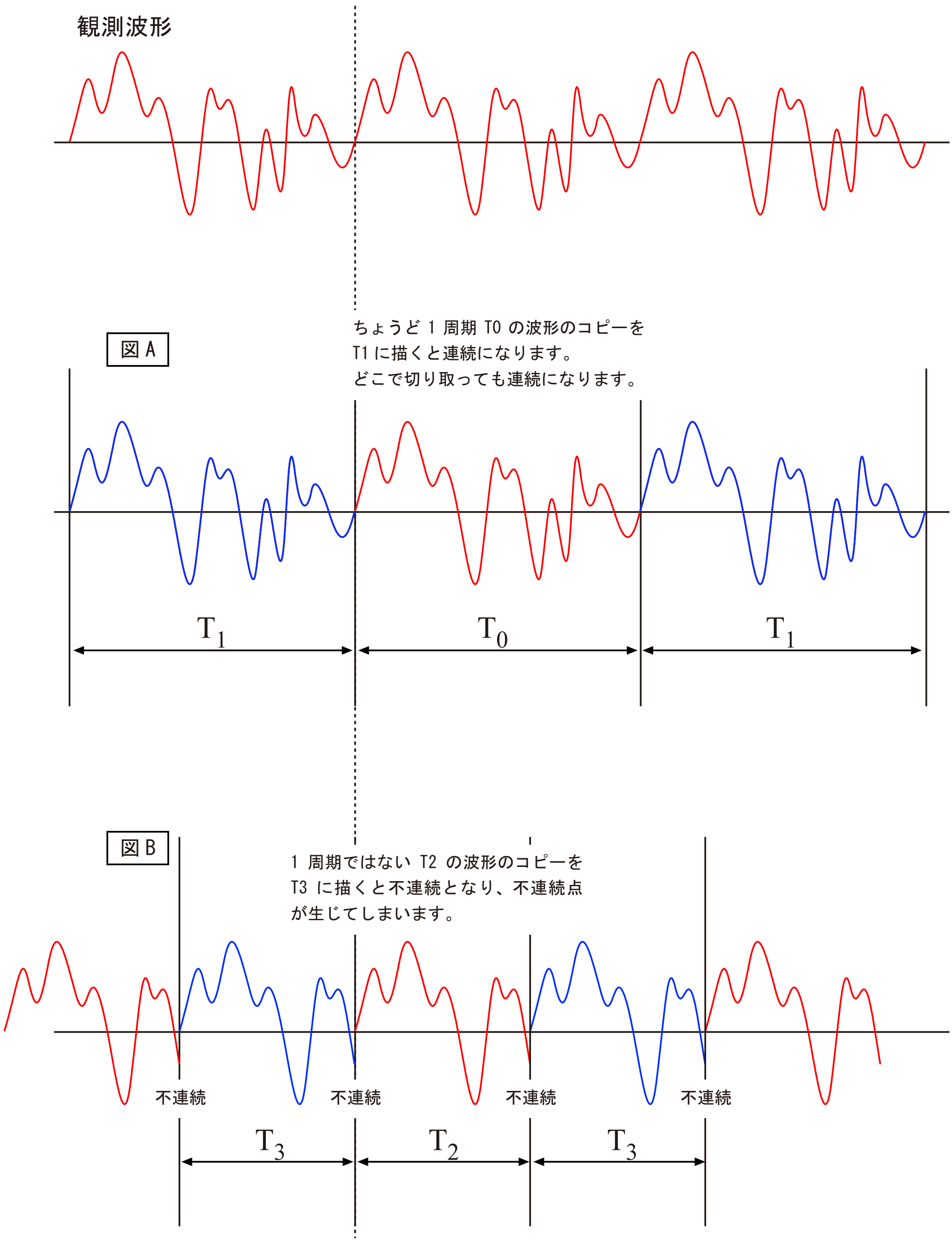
*f* (*t*)の式から 10Hz のスペクトルは；

a = cos 30 deg = 0.866　　　b = sin 30 deg = 0.5

であることがわかっていますから、N = 500 のときは一致しますが、N = 2048 では少し差があります。これはフーリエ級数の仮定である「周期性」によります。

N = 500（n = 0 ～ 499 間で 0.5 s 間）の場合は 10Hz のちょうど 5 周期分になりますが、N = 2048 では 10Hz の整数倍になっていません。

次図 A のようにちょうど 1 周期（またはその整数倍）になるように N をとると、同じ波形が連続で続いて描くことができますが、1 周期（又はその整数倍）とならない N では不連続になります（図 B)。
不連続点があると、その中間点をとることで連続となりますから、中間点で滑らかに繋がった波形として近似計算がおこなわれます。



さて、10Hz のフーリエ係数；

a = 0.866　　　b = -0.5

より、

$$f_{10Hz}(t) = 0.866\cos(2\pi \times 10t) - 0.5\sin(2\pi \times 10t)$$

となります。さらに、この式は又、Re = 0.866、Im = -b = 0.5 より；

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0.866^2 + 0.5^2} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \tan^{-1}\frac{0.5}{0.866} = \frac{\pi}{6} \quad (30\,\mathrm{deg})$$

$$f_{10Hz}(t) = \cos\left(2\pi \times 10t + \frac{\pi}{6}\right)$$

であることがわかります。

同様に、他の周波数成分を求めると、観測波形 $f(t)$は；

$$f(t) = \sum f_n(t)$$

となります。

これが、FFT アナライザの概念です。