計測コラム　　emm67 号用

波形と FFT－5

5．2 つの波形の合成

今までは１つの cos の波形を扱ってきました。そして観測される cos の波形を FFT するとどうなるかということで話を進めてきました。実際測定される波形は複雑な波形です。
複雑な波形が今までの話しとどう関係があるのでしょうか。
一般的に「複雑な波形は複数の cos 波の重ね合わさったものと考えることができる」といわれています。今回は 2 つの波形を取り上げてこのことを考えていきます。
これは今までの話を逆にたどり、周波数成分から観測波形へ進む話になります。

お断り：角度の単位をラディアン（rad)、度（deg）を説明の都合で混在して使っています。

■1　周波数が違う 2 つの cos 波の合成

振幅が 1 で、周波数 10Hz で初期位相が 30 度と周波数が 20Hz で初期位相が 45 度の 2 つの波形が重ね合わさるとどのような波形になるでしょう。
フーリエスペクトルの Mag、Phase では図 5 のように表示されることが予想されますが、皆様はいかがでしょうか。

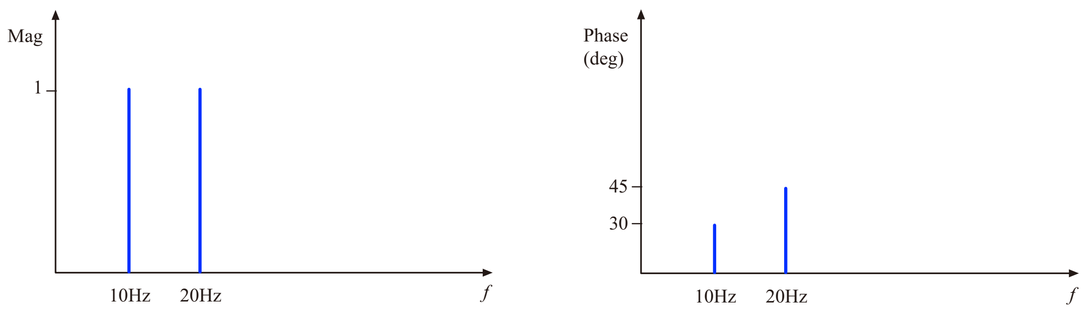

図 5

式であらわすと次のようになります。

$$f(t) = \cos(2\pi \times 10t + \theta) + \cos(2\pi \times 20t + \phi) \qquad \cdot\cdot\cdot(8)$$

$$\theta : \frac{\pi}{6} \quad (30度) \qquad \phi : \frac{\pi}{4} \quad (45度)$$

この式は表計算ソフトで直接計算することで、観測される波形 f(t)を求めることができます。では、フーリエスペクトルの実部、虚部表示ではどうなるかというと式(1)の t ＝0 の時、つまり初期位相がどうなるか考えます。前号を参考に、第 1 項のθを図示すると図６のようになります。

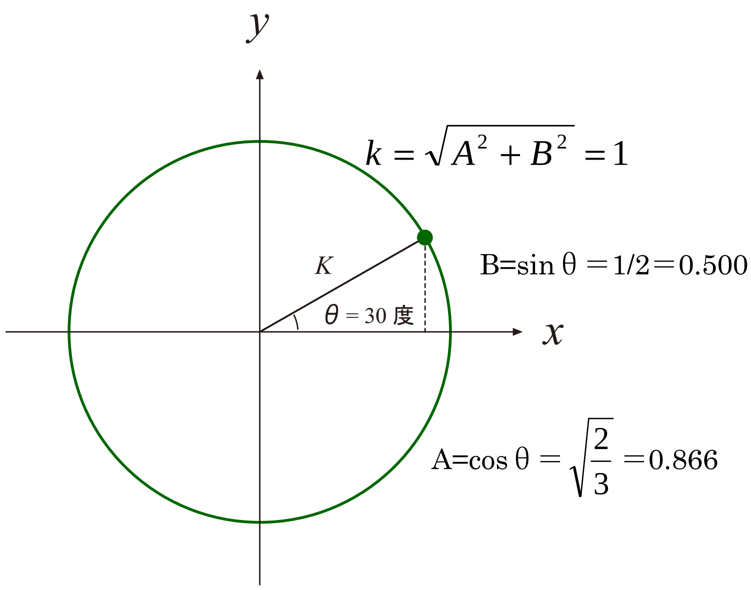

図 6

同様に第 2 項のφについて求めることができます。

C＝cosφ＝cos45 度＝ $\sqrt{1/2}$ ＝0.707

D＝sinφ＝sin45 度＝ $\sqrt{1/2}$ ＝0.707

よって、次図７のように表示されることがわかります。

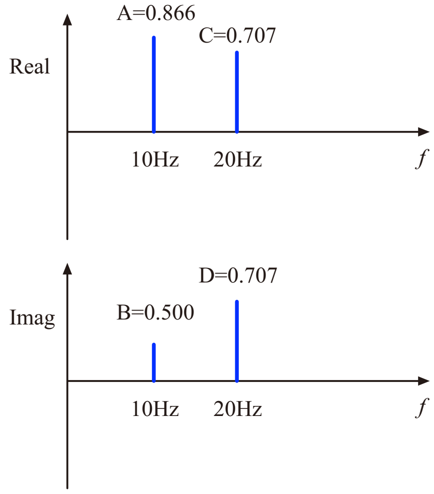

図 7

前号の式(2)を参考にすると、式(8)は次式で表すことができます。

$$f(t)=\{0.866\cos 20\pi t-0.5\sin 20\pi t\}+\{0.707\cos 40\pi t-0.707\sin 40\pi t\} \quad \cdot\cdot\cdot(9)$$

同様に複素関数では式(10)と表すことができます。

$$f(t)=\{0.866\cos 20\pi t+j0.5\sin 20\pi t\}+\{0.707\cos 40\pi t+j0.707\sin 40\pi t\}\cdot\cdot\cdot(10)$$

共役複素数 f*(t)で表すと

$$f^{*}(t)=\{0.866\cos 20\pi t-j0.5\sin 20\pi t\}+\{0.707\cos 40\pi t-j0.707\sin 40\pi t\}\cdot\cdot\cdot(11)$$

式(9)は式(11)の共役複素数の式に非常に似ていますね。

前 66 号では触れませんでしたが式(9)の sin 項の極性と式(10)の極性が逆になっていることには注目です。これは位相を考える場合、複素関数で FFT を計算している FFT アナライザでは式(10)の極性ですが、波形を表す【実関数】（複素数を使わない関数）の式は式(9)になるということです。

では、表計算ソフトを使い式(8)の通りに計算したサンプルデータを作り、DS-0221FFT ソフトで解析してみましょう。周波数レンジ 100Hz で解析したものを図８に示します。

サンプルデータの作成注意は

・サンプリング周波数＝周波数レンジ 100×2.56＝256Hz
　この逆数 1/256(s)ごとに 0s から初めてデータ総数を 2048 個作成します。

・A 列に時間、B 列に f(t)の データとします。

・保存は CSV 形式で保存後、拡張子を TXT に変換して DS0221 でデータを開きます。

＜参照先＞

http://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c_support/faq/ds2000/pdf/ds0221txttospect.pdf

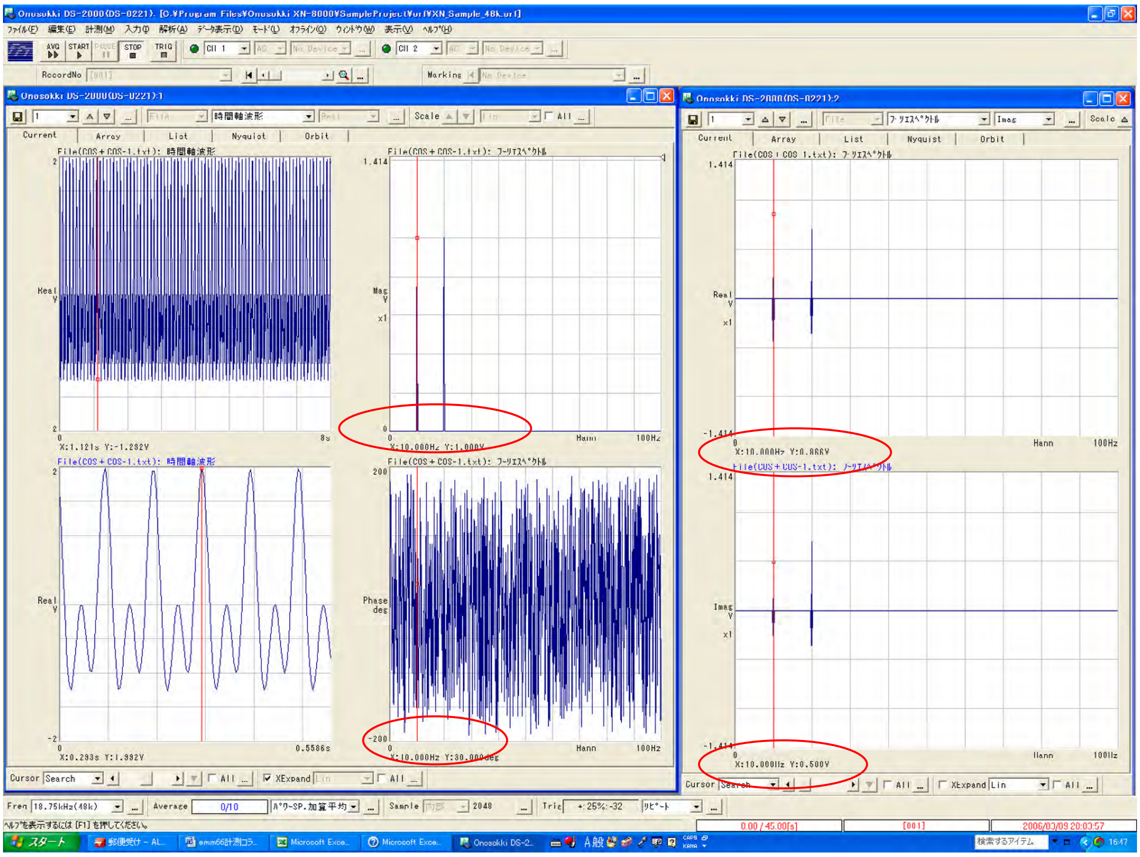

図 8　cos(20πt+π/6)＋cos（40πt＋π/4）の FFT

左上：作成した時間軸データ

左下：作成した時系列データ（X 軸スケール変更）　最大振幅値 1.992V

中上：フーリエスペクトル　Mag 表示　　10Hz　1.000V、20Hz　1.000V

中下：フーリエスペクトル　Phase 表示　　10Hz　30deg、20Hz　45deg

右上：フーリエスペクトル　Real 表示　　10Hz　0.866、20Hz　0.707

右下：フーリエスペクトル　Imag 表示　　10Hz　0.500、20Hz　0.707

が読み取れ、上述のとおりとなりました。

時間軸波形の最大振幅値は、周波数 10Hz の振幅 1.0V と 20Hz の振幅 1.0V を足した値 2 V ではありません。cos(20πt＋π/6)＋cos(40πt＋π/4)の足し合わされた波形であることに注意ください。

■2　周波数が同一の 2 つの cos 波の合成

周波数が同じ場合も■1 と同様に考えることができます。周波数 10Hz、初期位相 30 度と 45 度の 2 つの cos の合成式は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
&f(t)=\cos(20\pi t+\theta)+\cos(20\pi t+\phi) \\
&\qquad\qquad \theta:\pi/6 \quad (30\text{度}) \qquad \phi:\pi/4 \quad (45\text{度})
\end{aligned}
\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot (12)
$$

周波数が同じ場合の位相はどうなるのでしょうか。図 9 ように t=0 のときのベクトル合成となります。

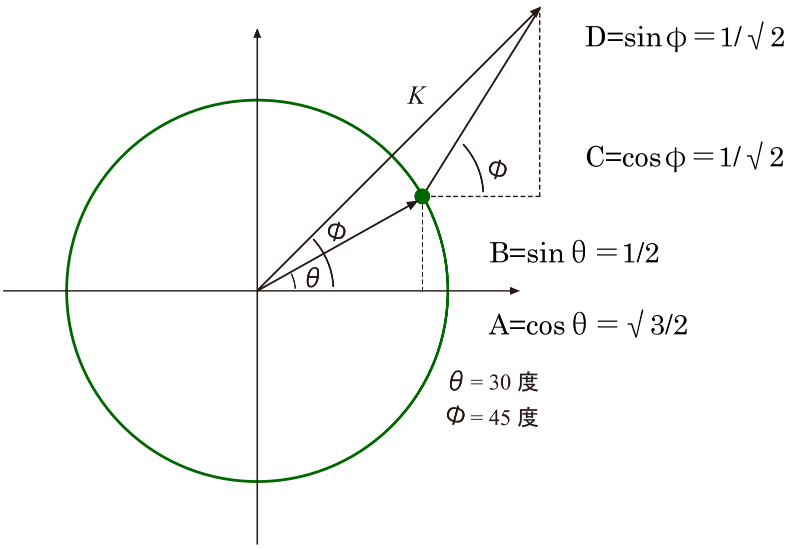

図 9

ベクトルを計算するには X 軸と Y 軸の成分に分けて考えて

$$A=\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B=\sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$C=\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad D=\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{A+C}{K} \qquad \sin\varphi=\frac{B+D}{K}$$

$$K=\sqrt{(A+C)^2+(B+D)^2} \qquad \tan\varphi=\left(\frac{B+D}{A+C}\right)$$

の関係より

$$K=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad 1.983$$

$$\psi=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=37.5 \quad (\mathrm{deg})$$

$$A+C=K\cos\varphi=1.57 \qquad B+D=K\sin\varphi=1.20$$

よって式(6)は

$$\begin{aligned} f(t)&=\cos(20\pi t+\theta)+\cos(20\pi t+\phi)\\ &=K\cos(20\pi t+\varphi)\\ &=1.98\cos(20\pi t+\varphi) \qquad \cdot\cdot(13)\\ &=1.57\cos 20\pi t-1.20\sin 20\pi t \end{aligned}$$

$$\theta:\pi/6 \quad (30度) \qquad \phi:\pi/4 \quad (45度) \qquad \varphi:0.65(37.5度)$$

又、複素関数であらわすと

$$f(t)=1.57\cos 20\pi t+j1.2\sin 20\pi t \qquad \cdot\cdot\cdot(14)$$

$$f^*(t)=1.57\cos 20\pi t-j1.2\sin 20\pi t \qquad \cdot\cdot\cdot(15)$$

になります。

先の例と同様に表計算ソフトで作成したサンプデータを、DS-0221FFT ソフトを使い周波数レンジ 100Hz で解析したものを図 10 に示します。

同じ周波数の cos 波の合成は、同じ周波数の cos 波になりますが振幅と位相が 37.5 度に変わります。

観測される波形が 1.983cos(20πt+)になりますから、cos(20πt+θ)、cos(20πt+ϕ)のどちらの成分かはわかりません。

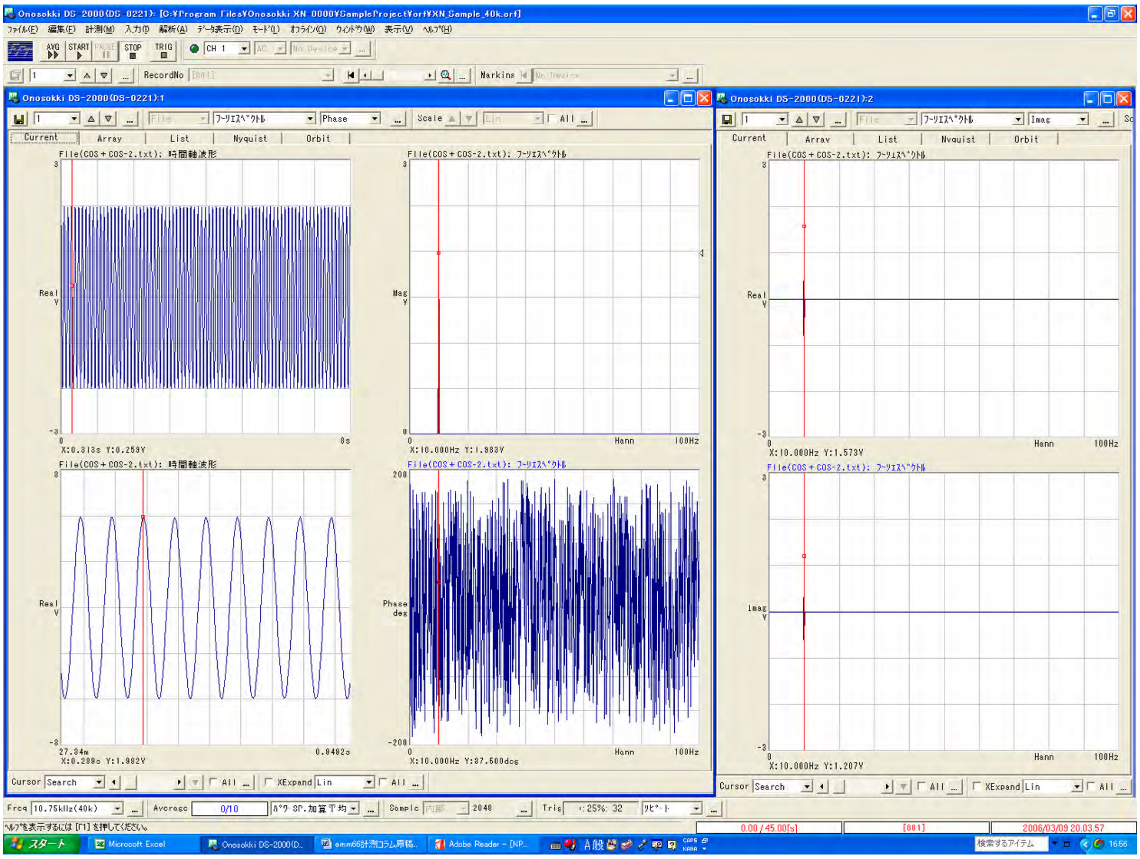

図 10　cos(20πt＋π/6)＋cos(20πt＋π/4)の FFT

一般の波形 f(t)は複数の cos の和で表されることが連想されますね。

そして、

Ccos（ωt＋θ）＝Acosωt－Bsinωt

より cos と sin に展開できることがわかりました。

ポイント

周期的な波形は cos の和で表すことができ、展開すると cos と sin の和で表される。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= C_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)+C_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)+C_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)+\cdots \\
&= \{A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t\}+\{A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t\}+\cdots \\
&= \sum_{n=1}^{N}\{A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\}
\end{aligned}
\qquad \cdot\cdot\cdot(16)
$$

$$
C_n=\sqrt{A_n{}^2+B_n{}^2} \qquad \tan\theta_n=A_n/B_n
$$

$$
A_n=C_n\cos\theta_n \qquad B_n=C_n\sin\theta_n
$$