計測コラム　　emm193 号用

基礎からの周波数分析（35）ー「ラプラス変換と伝達関数」

前回は、変換パラメータを複素数全体に広げ、**フーリエ変換**から**ラプラス変換**を導入しました。ラプラス変換は、**微分方程式**を簡便に解く手法として発達してきた経緯がありますが、今回は、電気回路系や制御系で最も重要な解析手法である「**伝達関数**」についてお話します。さらに、この伝達関数から系の周波数特性を表現する**周波数応答関数**を求める方法を説明します。

本シリーズ「基礎からの周波数分析」において「フーリエ変換と畳み込み」（emm135 号）と「伝達関数」（emm156 号）で述べたように、**インパルス応答** $h(t)$ の線形系に時間信号 $a(t)$ を入力すると、系の出力 $b(t)$ は、**畳み込み積分**で表すことができます。

$$b(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)a(t-\tau)d\tau \qquad \text{.................................}\ (1)$$

（注意：ラプラス変換を適用するために、$h(t)=0(t<0)$　としている）

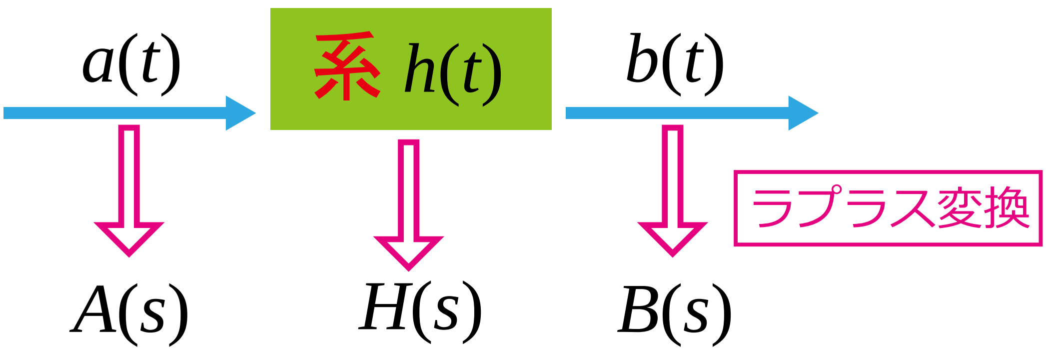


図1　系の入出力関係とラプラス変換

「伝達関数」（emm156 号）での説明と同様にして、式(1)の両辺をラプラス変換すると、ラプラス変換の性質により以下のような関係となります。

$$B(s) = H(s)A(s) \qquad \text{.................................}\ (2)$$

（注意：初期値を 0 としている）

このように、系の入出力の関係は時間軸上では畳み込み積分（式(1)）となりますが、ラプラス変換（**s 領域**）では、出力は、入力と系との積で与えられる（式(2)）という、簡単な関係になります。式(2)から

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \qquad \text{..............................} \quad (3)$$

この $H(s)$ を、図１における系（厳密には、線形時不変な系）の伝達関数と呼びます。すなわち、伝達関数は系のインパルス応答のラプラス変換で、入出力時間信号のラプラス変換の比として定義されます。

具体的な事例として、図２左の１自由度減衰振動系で、入力信号を外部からの力 $f(t)$、出力信号を応答変位 $x(t)$ の系とみなして（図 2 右）、ラプラス変換を使ってその伝達関数を求めます。

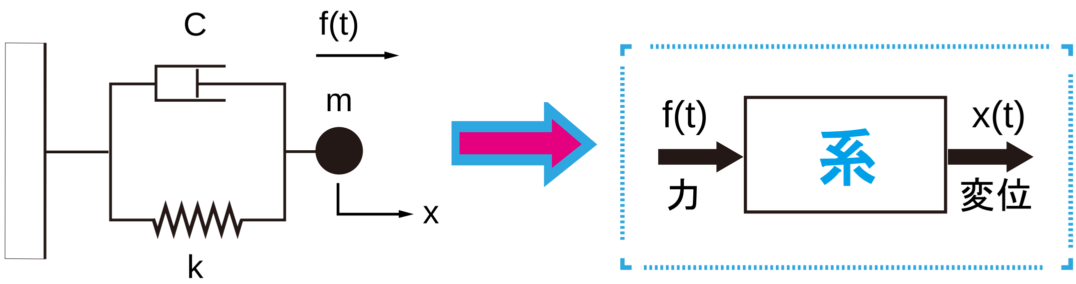


図２　１自由度減衰強制振動系モデル

「振動計測の基礎－２」（emm168 号）で説明したように、この振動系に存在する**慣性力**、**粘性抵抗力**、**復元力**との合力が外力と釣り合うことから、**運動方程式**は、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad \text{..............................} \quad (4)$$

となります。
式(4)の両辺のラプラス変換を求めると

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \qquad \text{..............................} \quad (5)$$

これから、系の伝達関数$H(s)$は、

$$H(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+k} \qquad \text{..................................（6）}$$

と求めることができます。

2 次遅れ要素系（式(6)のように分母が s の 2 次式となる系）の標準形は

$$H(s)=\frac{K\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2} \qquad \text{..................................（7）}$$

ここで、 ω_n :固有角周波数　ζ :減衰比(減衰係数)　K :ゲイン定数

と書くことができますので、
式(6)の振動系の伝達関数を標準形に当てはめると、各パラメータは、

固有角周波数	減衰比	ゲイン定数	
$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$	$K=1/k$	..................................（8）

と計算できます。

通常の系の伝達関数は、実数係数の**有理関数**で表せることが多く、

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \text{..................................（9）}$$

（$P(s)$と$Q(s)$は、実数係数のsの多項式で、$P(s)$の次数＜$Q(s)$の次数とする)）

と記述できます。式(9)で、分母の 根（$Q(s)=0$の解）を**極**(pole)、分子の 根（$P(s)=0$の解）

を**零点**（**zero**）と呼びます。例えば、

$$H(s)=K\frac{s+c}{s^2+as+b}=K\frac{s-z_1}{(s-p_1)(s-p_2)} \qquad \text{................................（10）}$$

では、零点はz_1で、極はp_1とp_2です。伝達関数では、特に極が重要な意味をもっています。
例として、振動する場合（0<ζ<１）で図 2 の 2 次遅れ要素系のインパルス応答を求めてみましょう。

前回説明したように、インパルスのラプラス変換は１だから $F(s)=1$ として

$$X(s) = H(s)F(s) = \frac{K\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(11)}$$

ここで、式(11)の分母＝０の根（すなわち極）を s_1, s_2 とおくと、

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d \quad s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(12)}$$

ω_d: **減衰固有角周波数**

となるので、式(11)の右辺を部分分数展開して、

$$X(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(13)}$$

$$K_1 = \left|(s-s_1)X(s)\right|_{s=s_1} = \frac{K\omega_n^2}{s_1-s_2} = \frac{K\omega_n^2}{j2\omega_d}$$

$$K_1 = \left|(s-s_2)X(s)\right|_{s=s_2} = \frac{K\omega_n^2}{s_2-s_1} = \frac{K\omega_n^2}{j2\omega_d}$$

式(13)の $X(s)$ を逆ラプラス変換して

$$x(t) = \frac{K\omega_n^2}{j2\omega_d}\left(e^{s_1t} - e^{s_2t}\right)$$

$$= \frac{K\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j}\right)$$

（オイラーの公式　$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$　より）

$$= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(14)}$$

この結果(式(14))から、伝達関数 $H(s)$のインパルス応答は、ζ< 1 では図 3 に示すように減衰しながら振動する時間波形となります。そして、式(12)と式(14)から、極の実数部（負の値）が減衰量を、極の虚数部が振動する周波数（減衰固有角振動数）を決めていることが分かります。また、伝達関数 $H(s)$（式(7)）の２つの極（式(12)）は複素共役の複素数で、図 4 に示すように、半径 ω_n（固有角周波数）の円上に位置して、s 平面上の左半分（実部＜０）にあります。

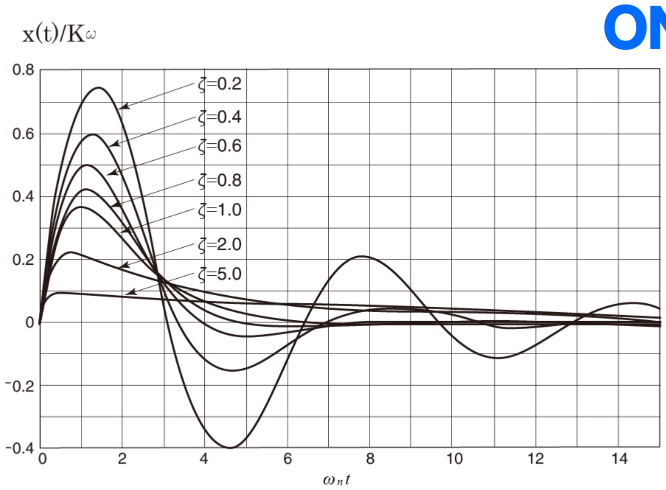


図 3　2次遅れ要素系のインパルス応答

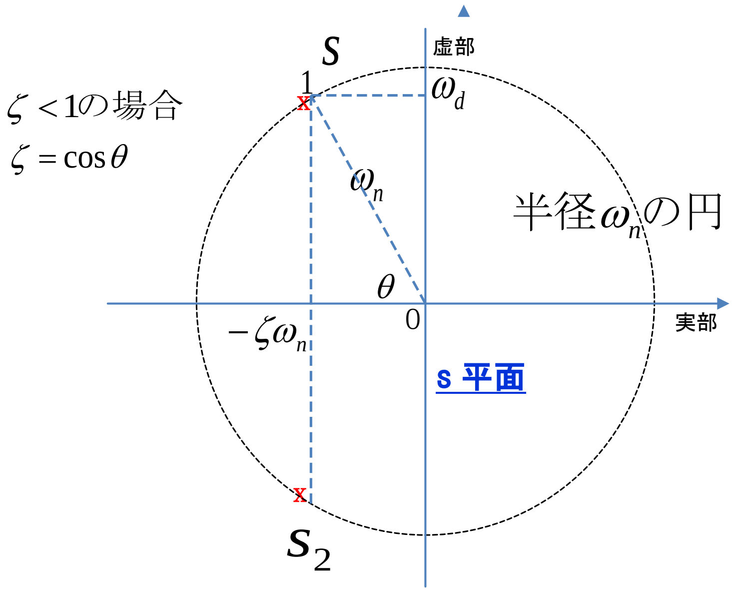


図 4　 s 平面上での H(s)の極の位置

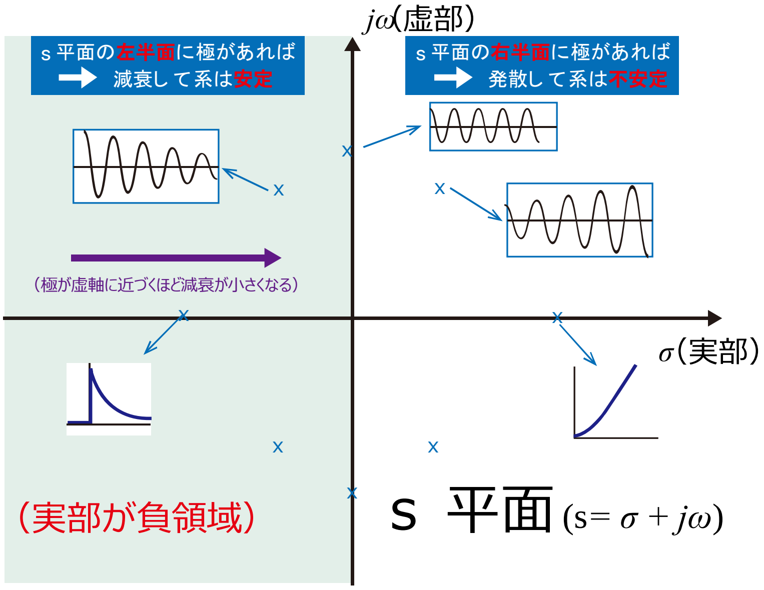


図 5　 s 平面上での伝達関数の極位置と系の応答
X が極の位置で、実軸上の極以外は複素共役(2 つでペア)となっている

これらの事柄などから、s 平面上の極と系の時間応答に関して以下のようにまとめることができます。（図５）

(1) 極が s 平面の左半面にある（実数部＜0）にあるときは、応答は減衰して系は安定である。
(2) 極が s 平面の右半面にある（実数部＞0）にあるときは、応答は発散して系は不安定である。
(3) 極が複素数となるときは、系は特定の周波数（減衰固有角周波数）で振動する。
(4) 極が虚軸に近づくほど（ζ—＞0）、減衰は小さくなる。
(5) 極が虚軸上にある時は、振動が持続して（減衰しないで固有角周波数で振動する）、原点から離れるほど、周波数は高くなる。

次に、伝達関数と周波数応答関数の関係について説明します。

伝達関数 $H(s)$の系において（図 1）
入力信号 $a(t) = \sin\omega t$、出力信号　$b(t)$とすると

$$B(s)=H(s)A(s)=H(s)\frac{\omega}{S^2+\omega_n^2} \qquad \text{..............................} \quad (15)$$

$H(s)$の極は全て単極で以下のように部分分数展開できるとして

$$B(s) = \frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\dots\dots+\frac{K_n}{s-s_n}+\frac{C_1}{s+j\omega}+\frac{C_2}{s-j\omega} \qquad \text{..............................} \quad (16)$$

式(13)と式(14)からわかるように、上記右辺の最初の n 項は、過渡現象をあらわす項で、定常的には最後の 2 項だけが残るので、定常項の時間信号を $b_s(t)$ とすると

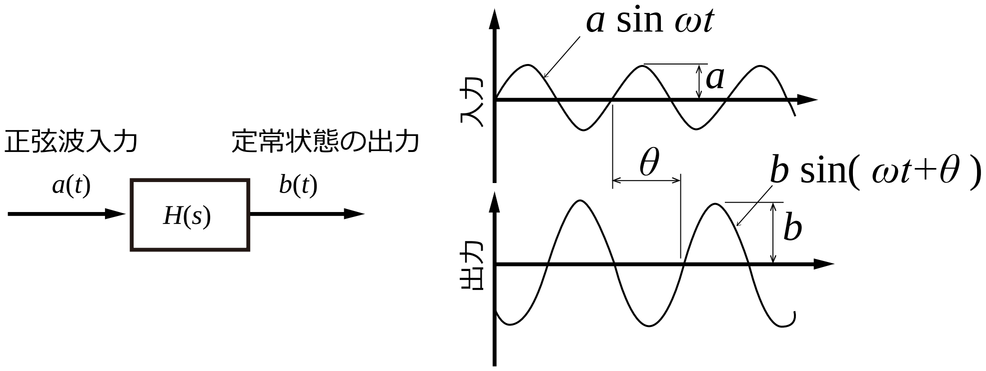
$$b_s(t)=C_1e^{-j\omega}+C_2e^{j\omega} \qquad \text{..............................} \quad (17)$$

留数の求め方より、C_1 と C_2 を求めて整理すると、

$$b_s(t)=-\frac{H(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega}+\frac{H(j\omega)}{2j}e^{j\omega} \qquad \text{..............................} \quad (18)$$

$$= \mathrm{Im}(H(j\omega))\cos\omega t+\mathrm{Re}(H(j\omega))\sin\omega t$$
$$= (H(j\omega))\sin(\omega t+\angle H(j\omega)) \qquad \text{..............................} \quad (19)$$

式(19)の結果から、過渡応答を除いた出力信号$b\ (t)$は、入力正弦波信号$a(t)$に対して、振幅は $|H(j\omega)|$ 倍され、位相は$\angle H(j\omega)$だけずれること分かります。すなわち、伝達関数$H(s)$の系に定常正弦波を加えた時の周波数応答（振幅比と位相差）は、s=jωとして得られる$H(j\omega)$の絶対値と位相角に等しくなります。S平面上で考えると、虚軸（S=jω）におけるH(s)の値が系の周波数特性そのものとなります。ます。このH(jω)がFFTアナライザでの周波数応答関数（FRF）となります。



$$\text{振幅比（ゲイン）} = |H(j\omega)| = \sqrt{H_r^{\ 2} + H_i^{\ 2}} = b/a$$

$$\text{位相差} = \angle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(H_i / H_r \right) = \theta$$

図 6　定常正弦波の応答と周波数応答関数との関係

式(7)の伝達関数 H(s)に **s=jω** とおくと、「振動計測の基礎その 2」（emm168 号）で説明した**振幅倍率**を求めることができます。

$$H(j\omega) = \frac{K\,\omega_n^{\ 2}}{\omega_n^{\ 2} - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} \qquad \text{……………………………（20）}$$

ゲイン定数 K=1 とおいて、振幅倍率のゲインは

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \text{……………………………（21）}$$

振幅倍率の位相角Φは（遅れを負の角として））

$$\phi = -\tan^{-1}\left\{ \frac{2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right\} \qquad \text{……………………………}\ (22)$$

入力強制外力の周波数を変数として、式(21)と式(22)をフラフ化すると、図 7 となります。系の固有角周波数 ω_n 付近で振幅が最大化しているすなわち**共振現象**を見ることができます。また、位相角は ω_n 前後で、180 度（π）回っている（遅れている）ことが分かります。

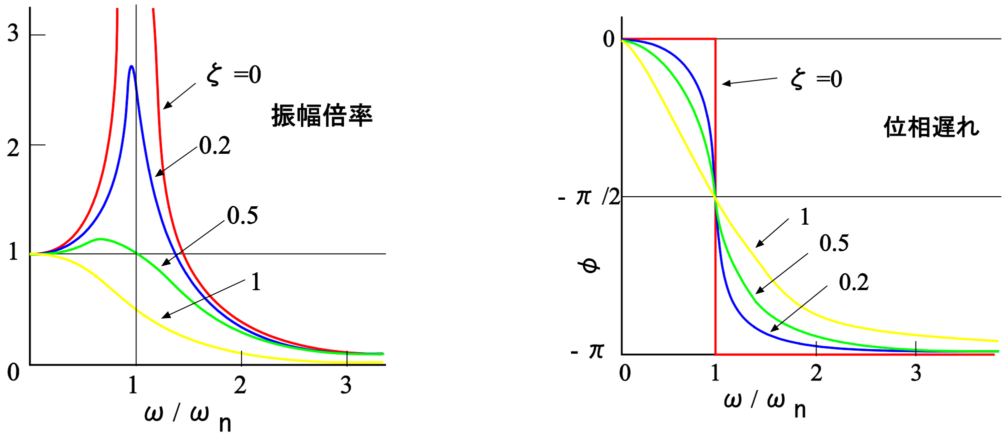


図 7　1 自由度減衰系の強制振動における振幅と位相

次に、系の極と零点とその系の周波数応答との関係について述べます。
式(10)の伝達関数を、再度例として考えます。（式(23)とします）

$$H(s) = K\frac{s+c}{s^2+as+b} = K\frac{s-z_1}{(s-p_1)(s-p_2)} \qquad \text{……………………………}\ (23)$$

z_1：零点
p_1, p_2：極

式(23)の伝達関数を持つ系の周波数応答は、s=jωを代入して

$$H(j\omega) = K\frac{j\omega - z_1}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \qquad \text{……………………………}\ (24)$$

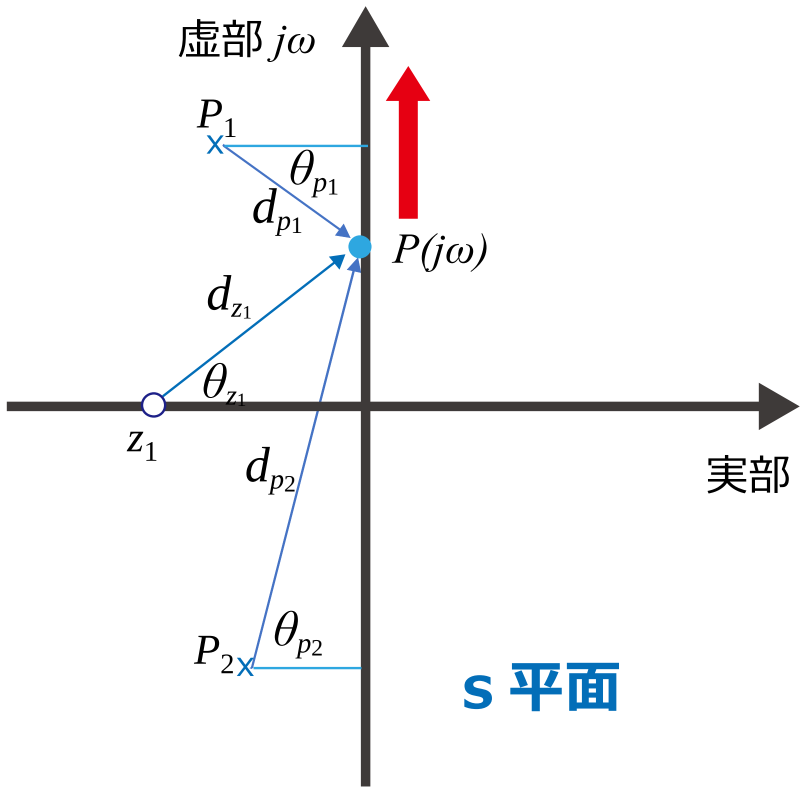


図８　ｓ平面上での極と零点を始点として虚軸上を動く点Ｐを終点とするときのベクトルの長さと角

虚軸（jω）上を動く点 P を考え、極と零点から P へとなるベクトルの長さと角度を図 8 のようにおくと、H(jω)のゲインと位相は

$$|H(j\omega)| = K\frac{|j\omega - z_1|}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2|} = K\frac{d_{z_1}}{d_{p_1}d_{p_2}} \qquad \text{(25)}$$

$$\angle H(j\omega) = \theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) \qquad \text{(26)}$$

と書くことができます。すなわち、虚軸上の点 P を移動させたとき（周波数をスイープさせる）にこれらの値がどう変化することを調べることにより、系の周波数特性を推測することができることになります。

具体的な例として、式(7)の 2 次遅れ要素系を考えます。

$$H(s)=\frac{K\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}=K\frac{\omega_n{}^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \qquad \text{..............................} \;(27)$$

$\zeta<1$のとき

$$p_1,p_2=-\sigma\pm j\omega_d \qquad \sigma=\zeta\omega_n \qquad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \qquad \text{..............................} \;(2\ \ )$$

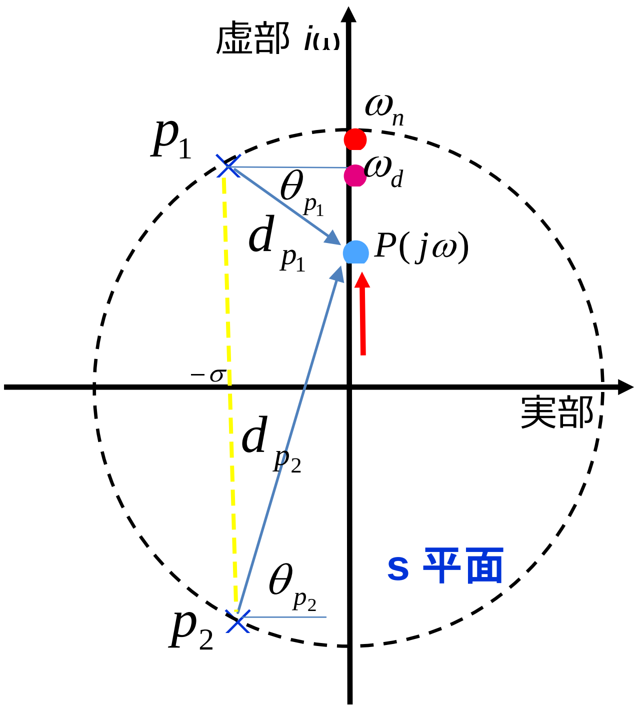


図 9　2 次遅れ要素系での例

$s=j\omega$　を代入して

$$H(j\omega)=K\frac{\omega_n{}^2}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)} \qquad \text{..............................} \;(29)$$

図 9 で、ゲインと位相は

$$\left|H(j\omega)\right|=K\frac{\omega_n{}^2}{d_{p_1}d_{p_2}} \qquad \text{..............................} \;(30)$$

$$\angle H(j\omega) = -(\angle\theta_{p_1} + \angle\theta_{p_2}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(31)}$$

図 9 と式(30)、(31)から、以下のようなことが分かります。

(1) ゲインは減衰角周波数（ω_d）付近で最大

(2) 位相は原点(DC) にて 0 度で、それ以降は単調減少

(3) 固有角周波数（ω_n）で、位相は必ず－90 度（－π/2）

(4) 無限大の周波数で、位相は－180 度（—π）

参考のために、サーボアナライザで実測した 2 次遅れ系のボード線図は、下図のようになります。

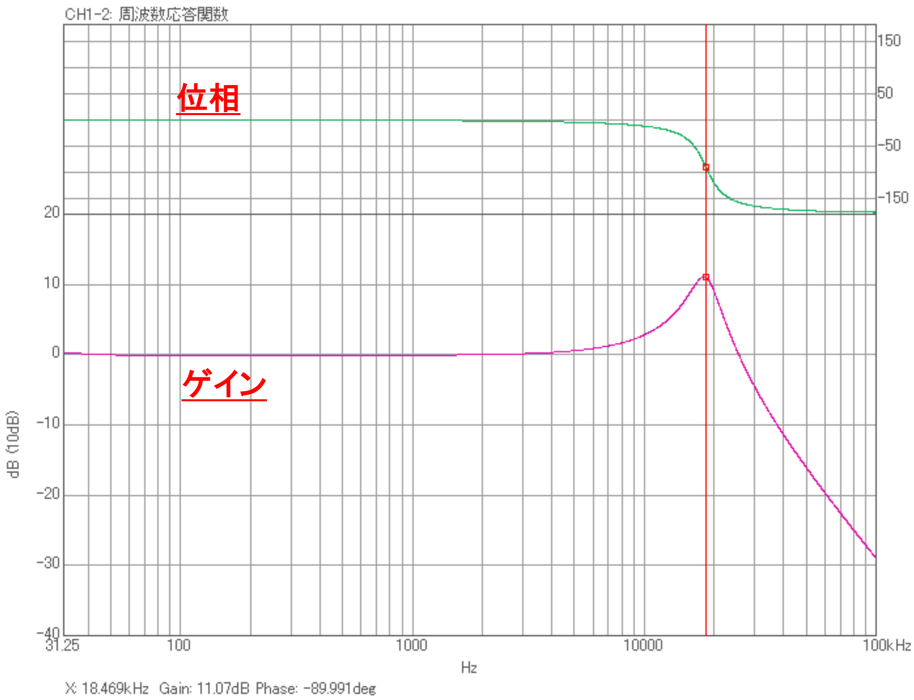


図 10　2 次遅れ要素系のボード線図(例)

最後にまとめです。

(1) 伝達関数は、系の入出力時間信号のラプラス変換の比として定義され、系のインパルス応答のラプラス変換となります。
(2) 通常の系の伝達関数は、実数係数の有理関数で表されることが多く、その分母の根を極、分子の根を零点と呼びます。
(3) 伝達関数の極や零点を解析することにより、その系の振る舞いや周波数特性などを理解することができます。
(4) s 平面上での伝達関数の極の位置で、系の安定性や減衰特性などを評価できます。
(5) 系の伝達関数で、s=jω を代入することで、系の周波数特性すなわち周波数応答関数を求めることができます。
(6) 虚軸上の点 P を移動させ(周波数をスイープさせ)、極と零点との関係を調べることにより、系の周波数特性を推測することができます。

【キーワード】
フーリエ変換、ラプラス変換、微分方程式、伝達関数、周波数応答関数、畳み込み積分、s 領域、インパルス応答、慣性力、粘性抵抗力、復元力、運動方程式、2次遅れ要素系、固有角周波数、減衰比、ゲイン定数、有理関数、極、pole、零点、zero、減衰固有角周波数、オイラーの公式、s平面、過渡現象、過渡応答、振幅倍率、共振現象、サーボアナライザ、ボード線図

【参考】

原島博・堀洋一共著「ラプラス変換と z 変換」数理工学社（2004年）
松村文夫著「自動制御」朝倉書店（1984年）

（Hima）