計測コラム　　emm180 号用

基礎からの周波数分析（29）－「ヒルベルト変換と解析信号」

基礎からの周波数分析（25）「振動計測の基礎その 4」において、減衰比に関するお話をした際に対数減衰率法に関して説明しました。そこで、その対数減衰率を算出する方法として、ヒルベルト変換を使って減衰自由振動波形の包絡線から求める方法を紹介しました。

今回は、そのヒルベルト変換についてお話します。

一般に、我々が観測できる時間信号は、**実信号**です。ここでは、簡単のために、正弦波状の関数 $x(t)$を考えます。

$$x(t) = A\cos(\omega t) = A\cos(\theta) \quad \cdots\cdots (1)$$

（1）式の実信号 $x(t)$の値は、**振幅** A と**角周波数** ω が時不変であれば、時間変数だけで決まり、**フーリエスペクトル**で簡単に求めることができます。

次に、両方とも時間によって変化する場合（下記の（2）式）

$$x(t) = A(t)\cos(\omega(t)\ t) = A(t)\cos(\theta(t)) \quad \cdots\cdots (2)$$

では、$A(t)$と $\theta(t)$（あるいは $\omega(t)$）は、時間によって変化する値で、このままでは、どちらが変化して実信号 $x(t)$が変化したのか分かりません。この**瞬時振幅** $\boldsymbol{A(t)}$と**瞬時位相** $\boldsymbol{\theta(t)}$を両方同時に求めるためには、時間信号 $x(t)$が実信号（1 つの値だけ持つ）でなく、**複素信号**（2 つの値を持つ）である必要があります。

図 1 にあるように、正弦波関数は、複素平面上で回転する点 $P(x,y)$の X 軸（実軸）上への射影が**余弦波**、Y 軸（虚軸）上への投影が**正弦波**とみなすことができますので、余弦波から正弦波を作ることができれば、振幅 A と位相 θ を同時に求めることができます。

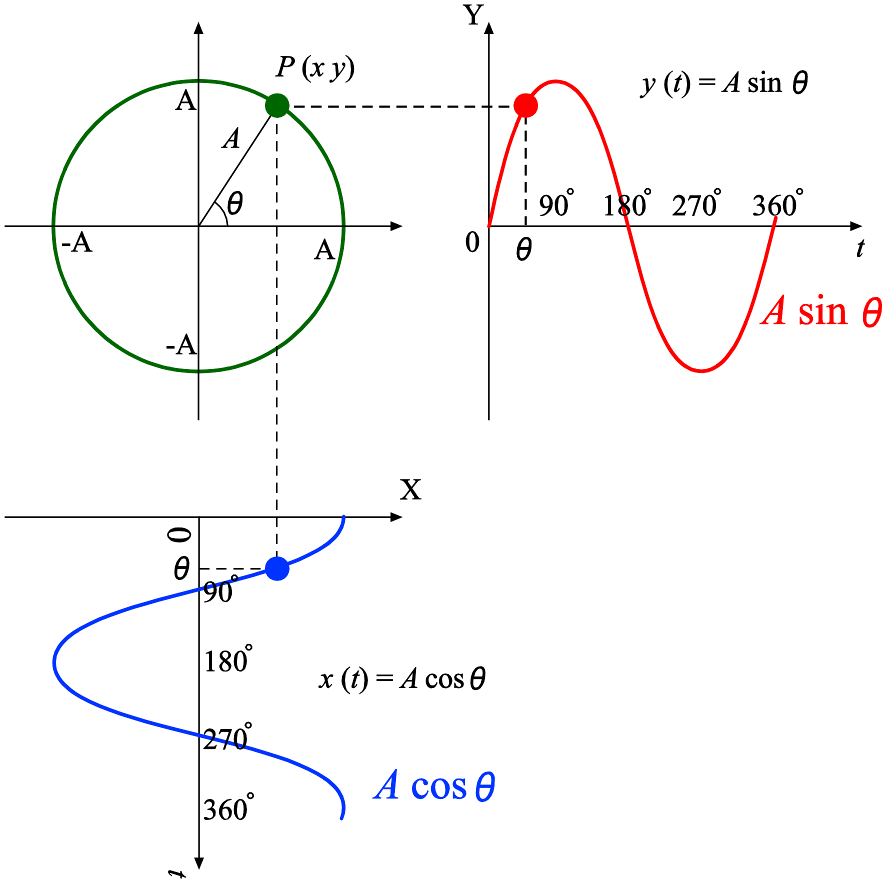

図 1　回転するベクトル OP と正弦波関数

点 P を**複素関数** $z(t)$で表現すると；

$$z(t) = x(t) + j\,y(t) = A(t)\cos(\theta(t)) + j\,A(t)\sin(\theta(t)) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$= A(t)\,e^{j\theta(t)} \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$A(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

となります。

正弦波関数は、余弦波関数の位相を 90°だけ遅延させてやることに求まりますから、実関数 $x(t)$を 90°遅延する操作をしてやることにより、複素関数 $z(t)$を求めることができます。この任意の時間関数を 90°シフトさせる方法の 1 つが、**ヒルベルト変換**です。

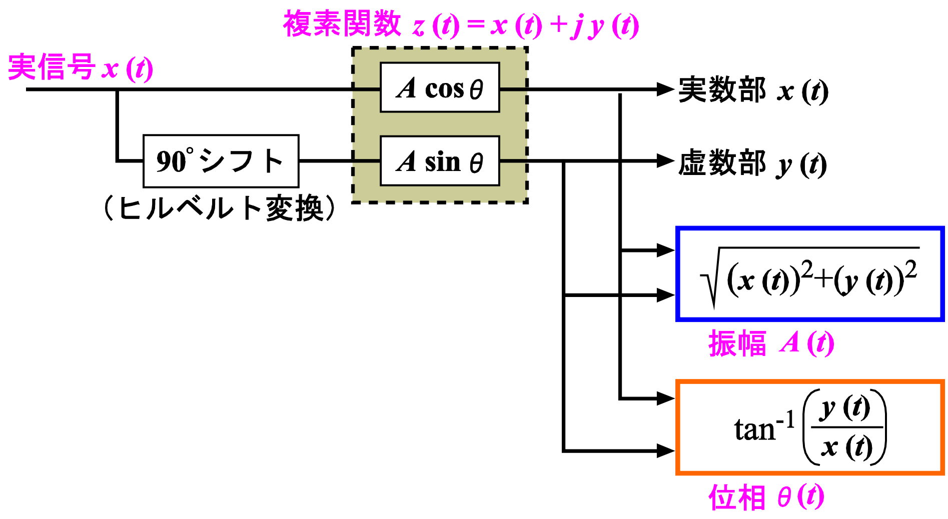

図 2　実関数から複素関数への求め方

実関数 $x(t)$のヒルベルト変換 $\hat{x}(t)$ は $x(t)$と $1/\pi t$ との畳み込みで定義されます。すなわち；

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau \qquad \text{（7）}$$

ここで、*は畳み込み（Convolution）で、積分はコーシーの主値積分です。

式（7）の両辺をフーリエ変換すると；

$$\hat{X}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f) \qquad \text{（8）}$$

$$\mathrm{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases} \qquad \text{（9）}$$

よって、式（8）の両辺を逆フーリエ変換すると；

$$\hat{x}(t) = IFT\,(-j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)) \qquad \text{（10）}$$

これらの処理の流れを図示すると、図 3 のようになります。

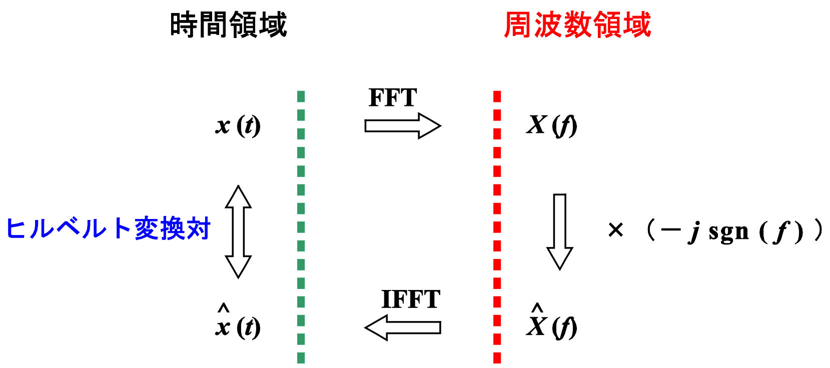

図 3　FFT を使ったヒルベルト変換

また、虚数単位 $j\left(=e^{j\frac{\pi}{2}}\right)$ を掛けることは位相を 90 度（＝π/2）進ませることに相当しますから、式（8）と式（9）から、ヒルベルト変換の**位相特性**は、図 4 のようになります。

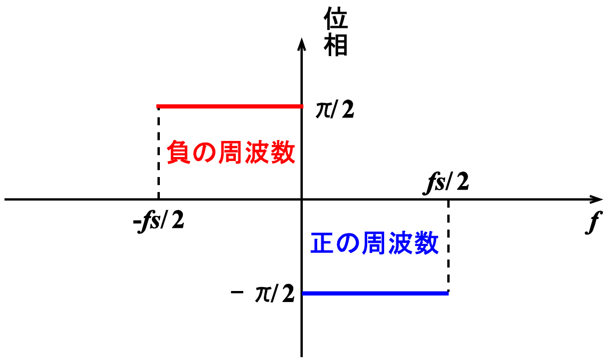

図 4　ヒルベルト変換の位相特性

図 2 にあるように、実関数 $x(t)$ とそのヒルベルト変換を用いて作られた複素関数 $z(t)$ を、$x(t)$ の**解析信号**（**Analytic Signal**）と呼びます。

$$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t) \qquad \text{………………（11）}$$

解析信号 $z(t)$のフーリエ変換を $Z(f)$とすると、$Z(f)$は以下の性質を持ちます（図 5）。

$$Z(f)=\begin{cases}2X(f) & f>0\\ X(f) & f=0\\ 0 & f<0\end{cases} \qquad (12)$$

すなわち、$Z(f)$は負の周波数成分を持たないという性質があります。逆に、この性質を利用すると FFT を使って比較的簡単に、解析信号 $z(t)$を算出することが可能です。

実信号 $x(t)$から解析信号 $z(t)$を求める手順は、以下です。

① $x(t)$を FFT して、$X(f)$を求める。
② 式（12）から $Z(f)$を求める。
③ $Z(f)$を IFFT して、$z(t)$を求める。

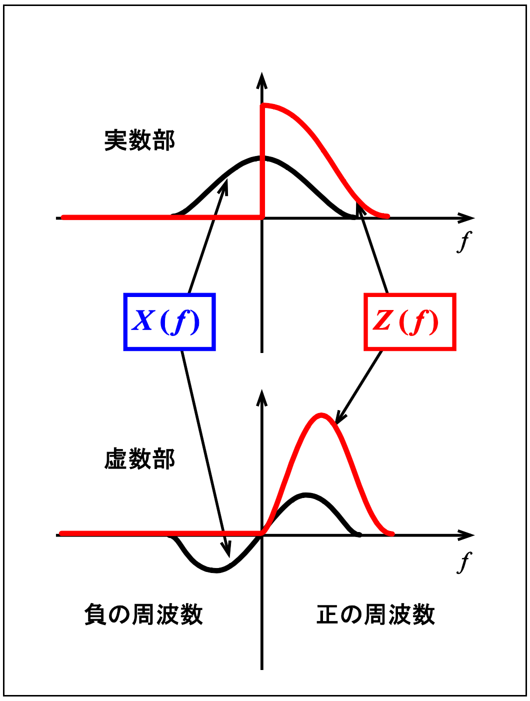

図 5　$Z(f)$の周波数特性

ここまでをまとめますと、ヒルベルト変換を使って解析信号 $z(t)$を作成すると、これから実信号 $x(t)$の瞬時振幅と瞬時位相を求めることができます。

$$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=A(t)e^{j\theta(t)} \qquad \text{(13)}$$

瞬時振幅（包絡線、エンベロープ）

$$A(t)=\sqrt{x(t)^2+\hat{x}(t)^2} \qquad \text{(14)}$$

瞬時位相

$$\theta(t)=\tan^{-1}\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \qquad \text{(15)}$$

具体的なデータ例を示します。

図 6 は、振幅変調（AM）した正弦波のエンベロープを求めた例です。

●キャリア周波数：5kHz
●変調周波数　　：100Hz
●変調度　　　　：20%

復調したエンベロープ波形からも、スペクトルからも変動度が 20%となっていることが読み取れます。

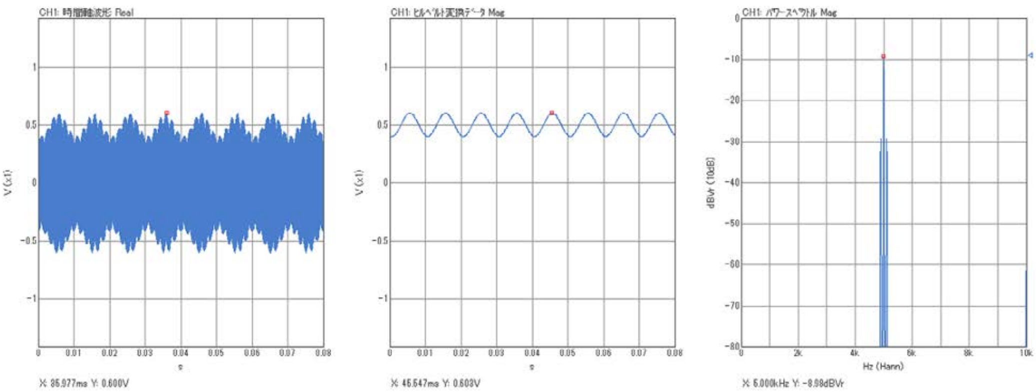

図 6　AM 変調波のエンベロープ
（左：元の搬送波、中：エンベロープ、右：搬送波のスペクトル）

再掲ですが、図 7 に、減衰時間波形から解析信号をもとめ、それから瞬時振幅（包絡線）を算出して縦軸を対数表示にして、その傾きから、対数減衰率法により、減衰比を求めた例を示します。

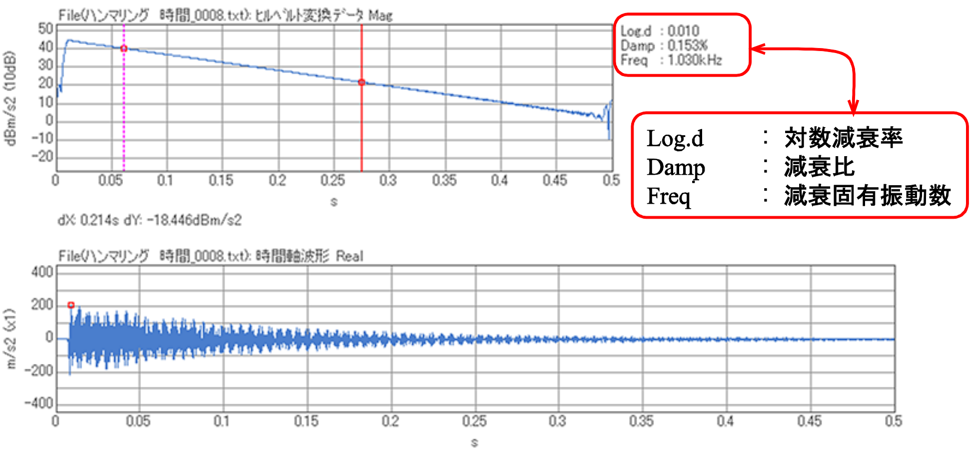

図 7　減衰時間波形と包絡線データから対数減衰率と減衰比を求めた例

瞬時位相が求まれば、それを時間微分することにより、瞬時周波数も求めることができます。

瞬時周波数 $f(t)$ は；

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta(t) \qquad \text{.................................} \quad (16)$$

となります。

図 8 は、FFT の時間窓 8 ms で、125 Hz から 100 kHz まで高速にサイン波をスイープさせたチャープサイン信号を解析した例です。X 軸が時間、Y 軸が周波数の表示で、100 kHz までリニアに周波数が変化していることがわかります。

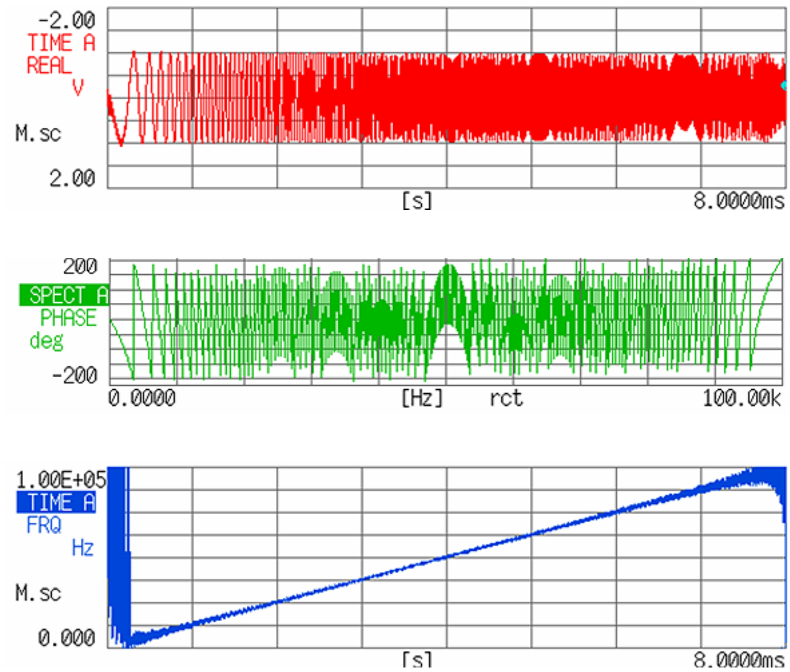

図 8　チャープサイン信号の瞬時周波数
（上：元の時間波形、中：瞬時位相、下：瞬時周波数）

瞬時周波数を使うことにより、回転変動成分を求めることができます。

その他、ヒルベルト変換の応用としては、系が線形であれば、システム伝達関数のヒルベルト変換の結果は元の伝達関数と等しくなる性質を利用して、系の非線形のチェックに利用されています。

最後に、まとめです。

(1) 実関数は、瞬時振幅と瞬時位相を同時に求めることはできません。
(2) ヒルベルト変換を使って実信号を複素時間信号に変換することにより、瞬時振幅と瞬時位相を同時に求めることができます。
(3) 実関数とそのヒルベルト変換した関数を、それぞれ実部と虚部とした複素関数を、解析信号と呼びます。
(4) 解析信号は、負の周波数成分を持たない関数です。この性質を利用して、比較的簡単に、実関数 $x(t)$ から、その解析信号 z(t)を求めることができます。
(5) 瞬時位相が求まれば、それを時間微分することにより、瞬時周波数も求めることができ、またそれから回転変動情報も得ることができます。
(6) ヒルベルト変換のその他の応用として、系の線形性のチェックにも使われています。

【キーワード】
実信号、振幅、位相、瞬時振幅、瞬時位相、余弦波、正弦波、複素信号、ヒルベルト変換、畳み込み、位相特性、解析信号、Analytic Signal、 エンベロープ、包絡線、瞬時周波数

【参考】

「ディジタルフーリエ解析（II） －上級編－」城戸健一編著　コロナ社（2007 年）

以上
（Hima）