

基礎からの周波数分析 (25) — 「振動計測の基礎 - 4」

これまで、3回にわたって「振動計測の基礎」に関してお話してきました。今回はその4として、減衰比についてのお話となります。

減衰比 ζ は、振動の挙動に重要な役目を果たしており、自由振動(1回目)では振動するかどうかまたは振動した場合での振動が止まる速さに影響を与え、強制振動(2回目)では共振周波数におけるピークの大きさに影響を与え、振動伝達率(3回目)では共振周波数におけるピークの大きさや共振周波数を越えた周波数帯域での伝達率に影響を与えます。

今回(4回目)では、FFTアナライザで実際に振動計測を行いその結果から減衰比 ζ を求める方法について説明します。

減衰を表現するパラメータは応用分野によっていろいろありますが、まず、対数減衰率から求める方法を紹介します。

対数減衰率 δ は、自由振動の減衰波形の隣り合う振幅比の自然対数として定義されます。なぜ、自然対数なのか? それはもちろん、図1にあるように、自由振動の振幅は指数関数的に減衰するからです。

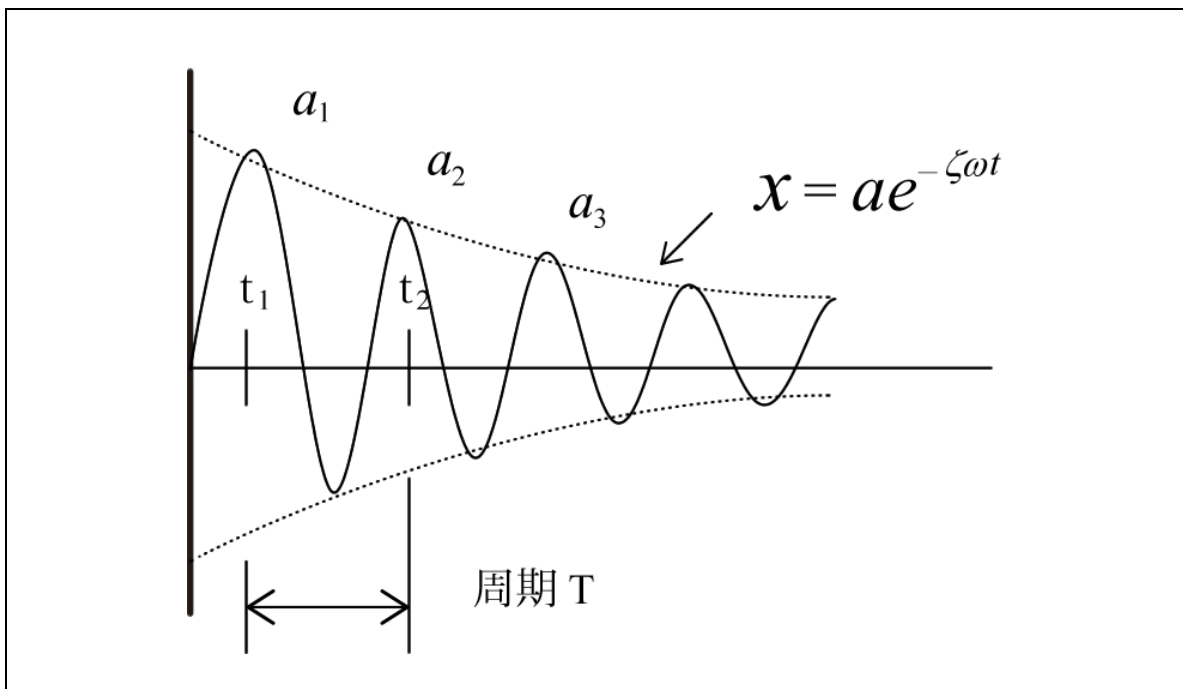


図1 減衰自由振動波形

図 1 の減衰自由振動波形 $x(t)$ は、

$$x(t) = ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ω_n :固有角振動数 ζ :減衰比

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$:減衰固有角振動数

$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$:減衰周期

となります。

図 1 において、対数減衰率 δ は

$$\begin{aligned} \delta &= \log_e \frac{a_1}{a_2} = \log_e \left(\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+T_d)}} \right) = \log_e (e^{\zeta\omega_n T_d}) \\ &= \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、 $\zeta \ll 1$ ならば

$$\delta = 2\pi\zeta \quad \dots\dots\dots (3)$$

次に、対数減衰率 δ の求め方ですが、まず、**ヒルベルト変換**の技術を利用して減衰波形の**包絡線**を求め、横軸を時間、縦軸は振幅の対数表示のグラフを描きます。(図 2)

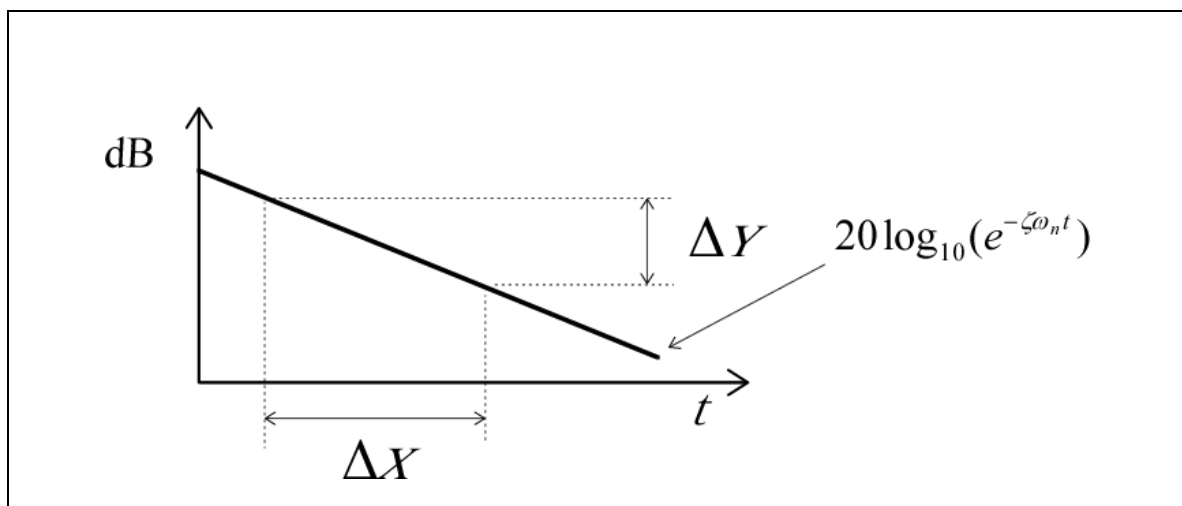


図 2 減衰波形の包絡線を求め、縦軸を dB 表示したグラフ

対数減衰率 δ は、減衰周期 T_d に対する傾きだから、dB 表示が常用対数だということに注意して、図 2 の直線の傾きより、

$$\frac{\delta}{T_d} = \frac{1}{20 \log_{10} e} \frac{|\Delta Y|}{|\Delta X|} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $T_d = 1/f_d$ だから

$$\delta = \frac{1}{20 \log_{10} e} \frac{1}{f_d} \frac{|\Delta Y|}{|\Delta X|} \dots\dots\dots (5)$$

FFT アナライザ (DS-3000 シリーズ) のデルタサーチ機能を使って、(5)式から、対数減衰率 δ を算出します。
さらに、(3)式から

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} \dots\dots\dots (6)$$

実測したデータと(5)式から対数減衰率 δ を算出して、(6)式から減衰比 ζ を求めることができます。

図 3 は、ハンマリングして自由振動の減衰時間波形を計測して、それから対数減衰率を求めさらに減衰比を求めた例です。この図は、ヒルベルト変換の帯域制限機能を利用して、1つの共振周波数の減衰波形にしていることに注意して下さい。

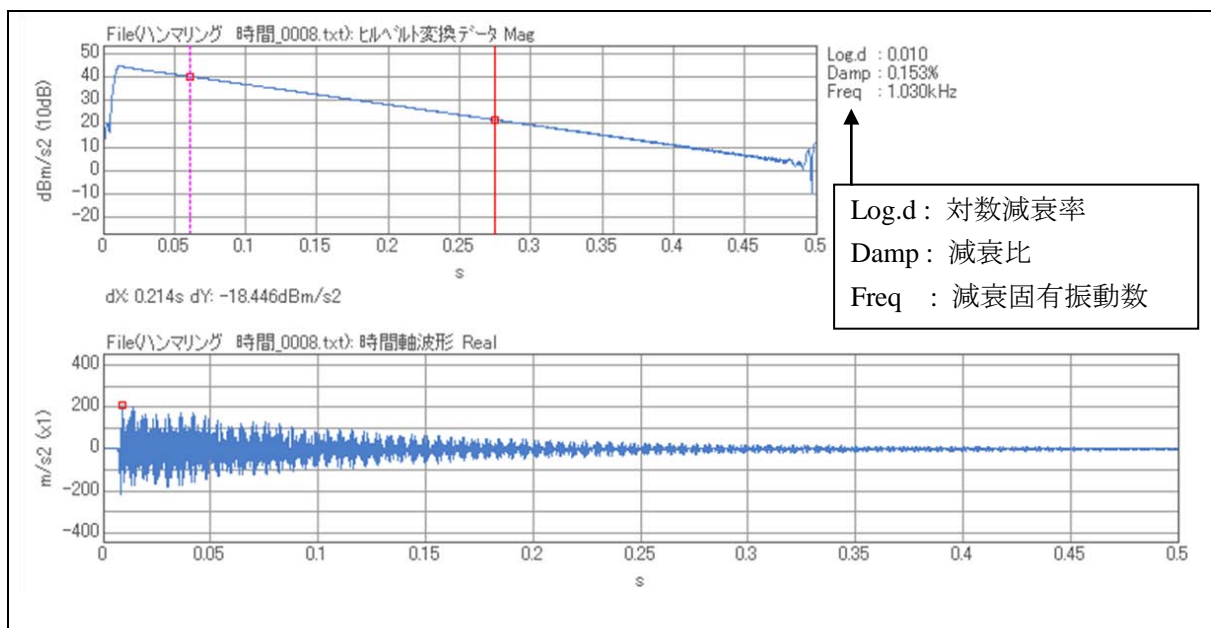


図 3 減衰時間波形と包絡線データから対数減衰率と減衰比を求めた例

次に、周波数応答関数の共振ピークから半値幅法により、減衰比を求めます。

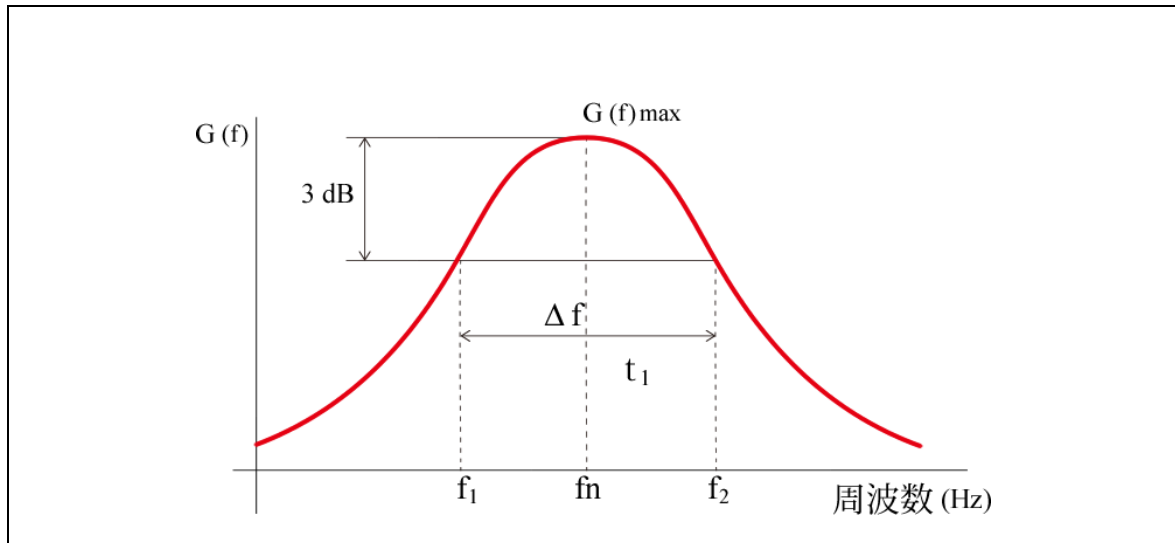


図4 半値幅法を説明する図

1自由度系の周波数応答関数（コンプライアンス） $G(f)$ とすると、

$$G(f) = \frac{1/k}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{f}{f_n}\right)\right\}^2}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 f_n : 固有周波数 ζ : 減衰比

図4において、共振周波数 f_n の値 $G(f)_{\max}$ から -3dB （パワーで $1/2$ 、振幅で $1/\sqrt{2}$ ）となる点を f_1 と f_2 、また $\Delta f = f_2 - f_1$ とします。

f_1 と f_2 は近代的に $f_n \pm \Delta f / 2$ とおけるので、 f_n との比は

$$\left(\frac{f_n \pm \Delta f / 2}{f_n}\right)^2 = \left(1 \pm \frac{\Delta f}{2f_n}\right)^2 \approx 1 \pm \frac{\Delta f}{f_n} \quad \dots\dots\dots (8)$$

この値を (7) 式に代入して逆数をとると、

$$\frac{\sqrt{2}}{|G|_{\max}} = k \sqrt{\left(\mp \frac{\Delta f}{f_n}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(1 \pm \frac{\Delta f}{f_n}\right)^2} \approx k \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f_n}\right)^2 + 4\zeta^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、最大値 $|G|_{\max}$ は近代的に (7) 式より $1/2k\zeta$ となるから (9) 式に代入すると

$$2\sqrt{2}k\zeta = k\sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f_n}\right)^2 + 4\zeta^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式を変形して

$$\zeta = \frac{\Delta f}{2f_n} \quad \dots\dots\dots (11)$$

パワーが 1/2 の帯域を使っているので、上記の(11)式で減衰比を求める方法を**半値幅法 (half-power bandwidth method)** と呼びます。

半値幅法以外に、mdB 法も考えることが出来ます。この時は、

$$\zeta = \frac{k\Delta f}{2f_n} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $k = \frac{1}{\sqrt{10^{m/10} - 1}}$

ちなみに、1dB の時は、 $k=1.97$ 2dB の時は、 $k=1.31$ です。

半値幅法で、制振材料の評価パラメータで用いられる**損失係数 (loss factor)** も求められます。履歴減衰を伴う減衰振動では、振動変位に比例する復元力を生じさせる**複素弾性率 K'** を定義して、実数部を K_1 、虚数部を K_2 とすると

$$K' = K_1 + jK_2 = K_1(1 + j\eta) = K_1(1 + j \tan \delta) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、

$$\eta = \frac{K_2}{K_1} = \tan \delta \quad \dots\dots\dots (14)$$

となります。(図5) この η を損失係数と呼びます。複素弾性率 K' は、1自由度系モデルでばね定数 k と粘性減衰係数 c の両特性を含んだものです。図5からわかるように、損失係数は、タンデルタ(タンデル)とも呼ばれます。

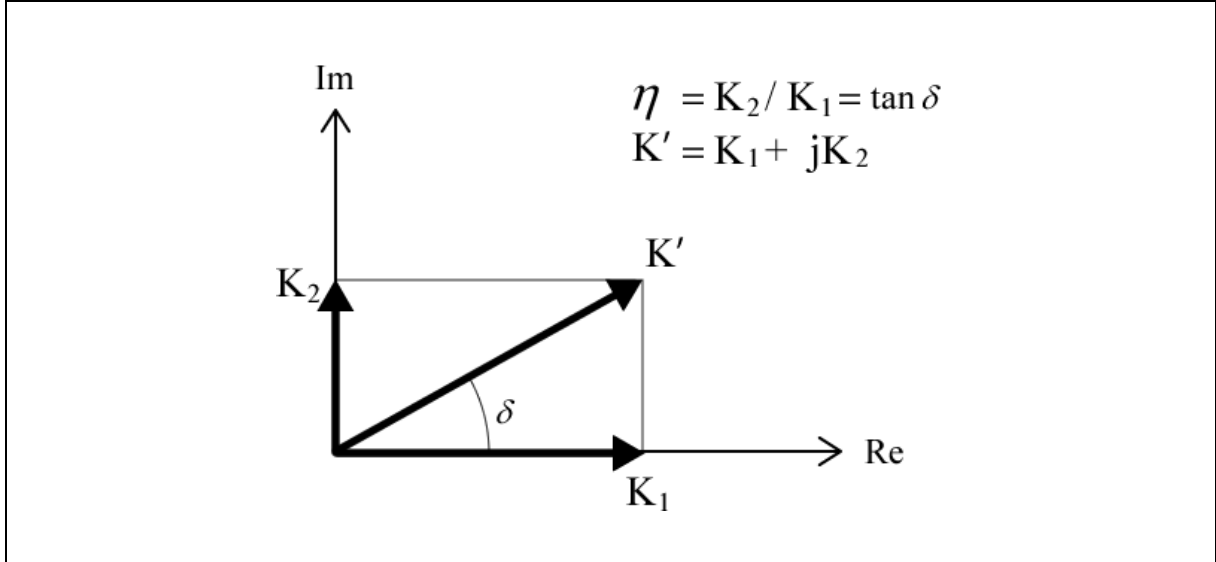


図5 複素弾性率と損失係数

半値幅法から、損失係数 η は以下の式で求められます。

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_n} \dots\dots\dots (15)$$

$$\eta = 2\zeta \dots\dots\dots (16)$$

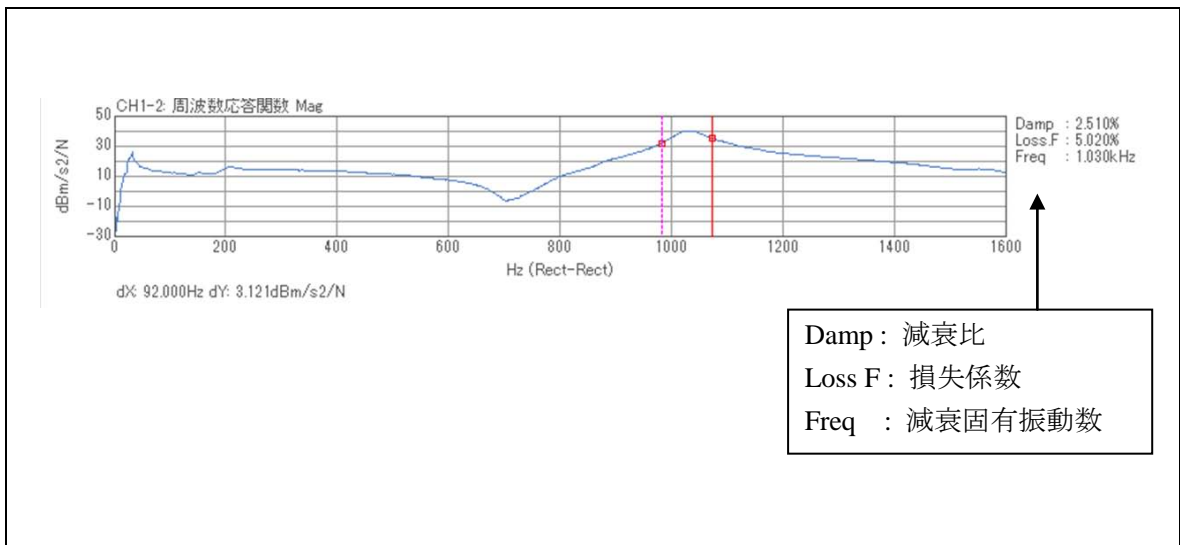


図6 半値幅法による減衰比と損失係数の実測例

図 6 は、FFT アナライザを使ってハンマリング法で計測した FRF（周波数応答関数）から、半値幅法により減衰比と損失係数を求めた例です。

いろいろなパラメータのまとめとして、減衰特性を表す各種パラメータ間の関係の一覧表が、下記の表 1 です。

表 1 各種パラメータ間の相互関係

| | 減衰比 | 対数減衰率 | Q 値 | 損失係数 |
|----------|---------------|-------------|--------------|--------------|
| | ζ | δ | Q | η |
| ζ | — | $2\pi\zeta$ | $1/2\zeta$ | 2ζ |
| δ | $\delta/2\pi$ | — | π/δ | δ/π |
| Q | $1/2Q$ | π/Q | — | $1/Q$ |
| η | $\eta/2$ | $\pi\eta$ | $1/\eta$ | — |

注意 1. 本表は、 $\zeta \ll 1$ とみなせる場合です。

注意 2. Q 値は、振動系が共振する場合、この共振の鋭さを表す量で、損失係数の逆数です。

最後に、まとめです。

- (1) 減衰比は、自由振動や強制振動や振動伝達率などで振動の挙動に重要な役目を果たしています。
- (2) 減衰自由振動波形から対数減衰率を算出して、それから減衰比を求めることができます。
- (3) 周波数応答関数データから、半値幅法により減衰比を求めることができます。
- (4) 半値幅法で、制振材料の評価に用いられる損失係数もまた求まることができます。

【キーワード】

減衰比、自由振動、強制振動、共振周波数、振動伝達率、対数減衰率、固有角振動数、減衰固有角振動数、減衰周期、ヒルベルト変換、包絡線、デルタサーチ機能、半値幅法、half-power band width method、損失係数、loss factor、複素弾性率、ばね定数、粘性減衰係数、タンデルタ、タンデル、ハンマリング法、Q 値

【参考】

1. 「モード解析入門」長松昭男著 コロナ社（1994 年）
2. 小野測器技術レポート「減衰特性をあらわす係数」

https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c_support/newreport/dampingfactor/index.htm

以上
(Hima)