計測コラム　　emm160 号用

# 基礎からの周波数分析（19）－「伝達関数とその図示方法」

前回まで 2 回に掛けて「**伝達関数**」についてお話しました。今回は、その 3 回目として、その伝達関数の具体的な計算方法、その図示方法、電気系や機械系などの実例についてお話しします。

伝達関数を求める目的は、伝達系の伝達特性を求めることです。一般には、伝達関数は、伝達系の入出力の**ラプラス変換**の比として定義されますが、ここでは、実測できる周波数の関数として考えます。

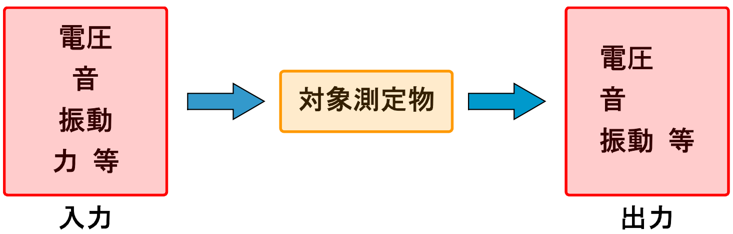


図 1　伝達系の例

いま、図 1 のような伝達系を考えて、入力に一定の周波数 $f$ を持つ正弦波関数 $x(t) = a\sin(2\pi f t)$ を入力すると、線形系ですので、その**定常応答**である出力も同じ周波数 $f$ の正弦波関数となり、$y(t) = b\sin(2\pi f t + \theta)$ となります（図 2）。

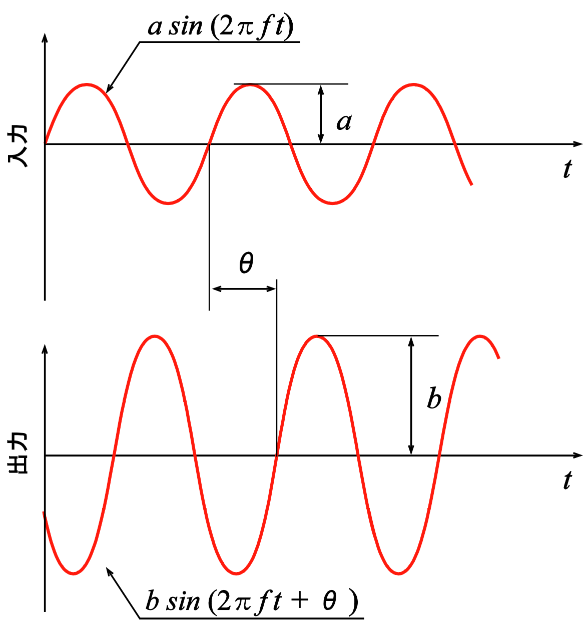


図 2　正弦波を入力した時の線型系の定常応答

このとき、伝達関数$H(f)$の**ゲイン**と**位相**は；

ゲイン　$\left|H(f)\right| = \dfrac{b}{a}$　　（振幅比）

位相　$\angle H(f) = \theta$　　（位相差）

となります。すなわち、伝達関数$H(f)$は、周波数の値によって決定される２つの量（ゲインと位相）を持ち、これを特に系の**周波数応答**と呼びます。

また、伝達関数$H(f)$は、１つの周波数に対してゲインと位相と２つの情報を持つので複素数として表すことができます。

図３において、複素関数$H(f)$の**実数部**を$H_{real}$、**虚数部**を$H_{imag}$とすると；

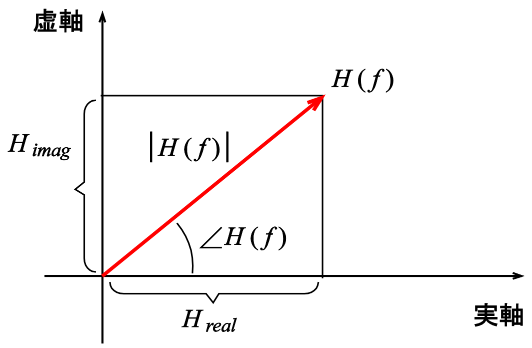

図３　複素平面上での$H(f)$

$$H(f) = H_{real} + j\,H_{imag} \qquad \text{(1)}$$

$$H(f) = \left|H(f)\right| e^{j\angle H(f)} \qquad \text{(2)}$$

となります。すなわち図３は**複素平面**上である周波数における伝達関数$H(f)$を**ベクトル**で表したものです。

また、ゲインと位相は、実数部と虚数部を用いて；

ゲイン　$$\left|H(f)\right| = \sqrt{H_{real}^2 + H_{imag}^2} \qquad \text{(3)}$$

位相　$$\angle H(f) = \tan^{-1}\left(\frac{H_{imag}}{H_{real}}\right) \qquad \text{(4)}$$

と、記述することができます。

伝達関数$H(f)$は、周波数を変数とした複素関数なので、いろいろな図示表現があります。ここでは、共振のあるローパスフィルタの伝達系を例にとって説明します。

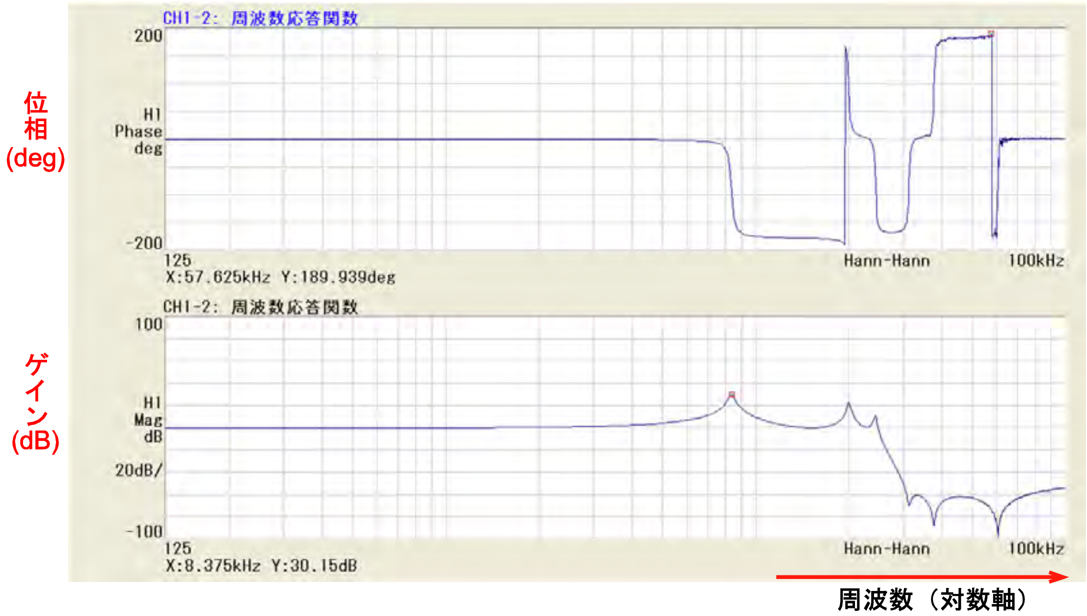


図 4　ボード線図のグラフ例

図 4 は、**ゲイン特性**と**位相特性**を各周波数$f$に対してプロットしたもので、**ボード線図**と呼ばれ、通常横軸（周波数軸）は、対数軸で表示します。また，そのゲイン特性の縦軸は、式（3）を dB 化した値$20\log\left|H(f)\right|$、位相特性の縦軸は±180 度（あるいは±200 度）表示となります。このグラフの特徴は、①**共振周波数**とその大きさが分かりやすい、②グラフが 2 つになるが、周波数軸が明確、③ゲインと位相の関係が分かりやすい（共振点では必ず位相が 180 度遅れるなど）などです。

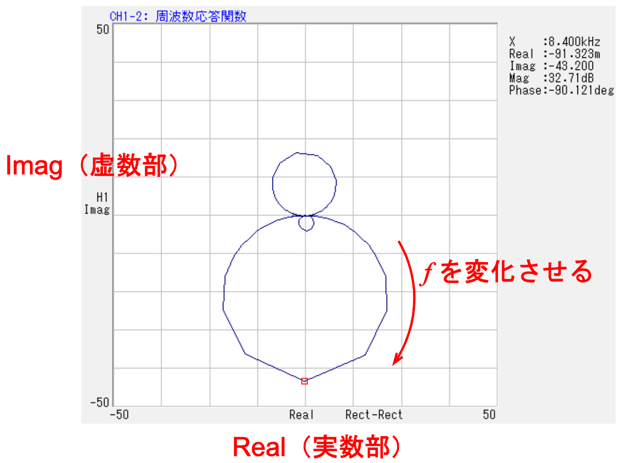


図 5　ナイキスト線図のグラフ例

図 3 と同じように、図 5 は複素平面上で周波数を変化させながら、伝達関数をベクトル表示しその頂点をプロットしたもので、**ナイキスト線図**（**ベクトル軌跡**）と呼ばれ、横軸は実数部、縦軸は虚数部となります。このグラフの特徴は、①共振点付近での位相の回りが分かりやすい、②1 つのグラフですむが、周波数軸がわからない、などです。

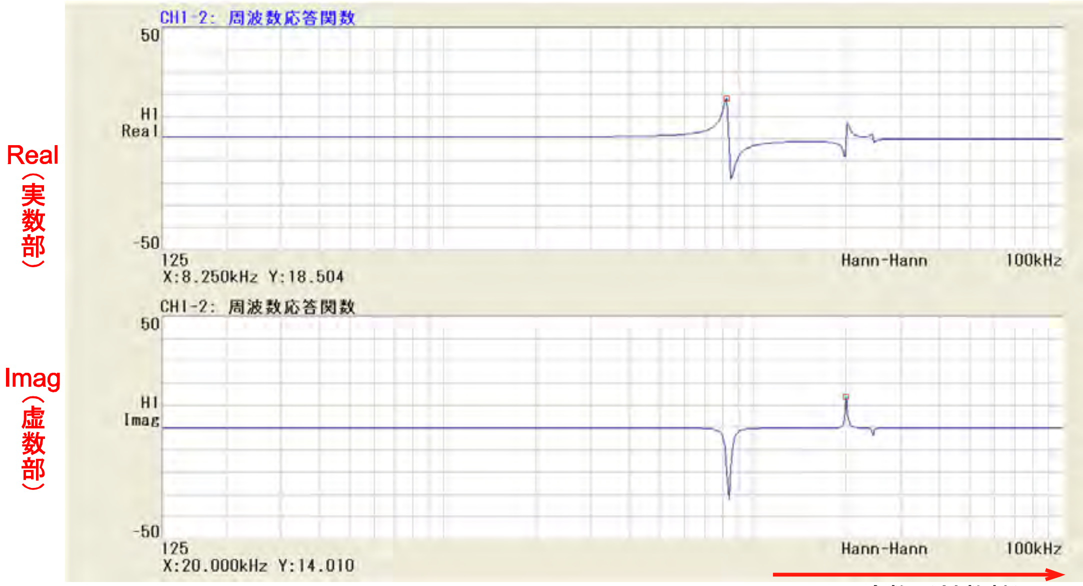


図 6　コクアド線図のグラフ例

図6は、実数部と虚数部を各周波数$f$に対してプロットしたもので、**コクアド線図**と呼ばれます。このグラフの特徴は、①虚数部で共振点を見つけやすい、②ゲインと位相が直接表現されない、などです。

その他に、制御系などで使われる**ニコルス線図**（**ゲイン位相線図**）もありますが、ここでは省略します。

**FFT アナライザ**や**サーボアナライザ**など具体的な計測器では、どのような方法で伝達関数 $H(f)$ を求めているのでしょうか？

最近の周波数分析器では、**FRA 法**と **FFT 法**の２つの方式が用いられています。

FRA（Frequency Response Analysis）法は、単一の周波数を掃引しながら、オートレンジ機能を使用して、1 ポイントずつ繰り返し測定（**フーリエ積分**）することにより、指定された周波数帯域の周波数応答を求めます（図 7)。

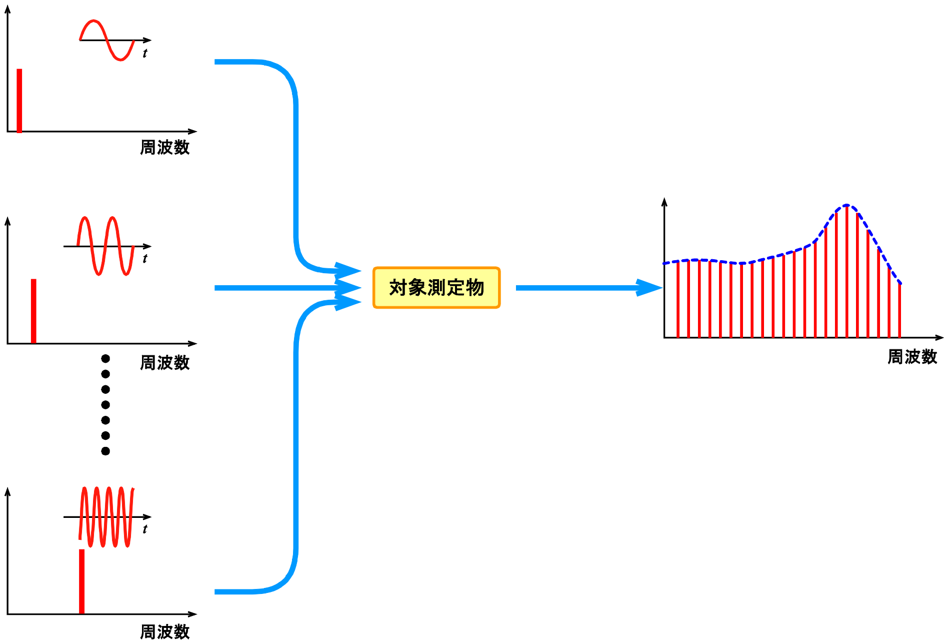


図 7　FRA 法の測定原理

本方式の特徴は；

(1)　1 回の測定で 1 点の周波数だけ測定するので、計測器の**オートレンジ**機能を用いて非常にダイナミックレンジの高い計測が可能
(2)　対数分解能のスイープ（**ログサインスイープ**）が可能
(3)　広帯域を任意の周波数範囲で、計測が可能
(4)　計測時間が長い

です。

それに対して、FFT（Fast Fourier Transform）法は、予め用意された分析周波数帯域に連動した信号源を測定対象物に加え、全帯域を FFT 技術により同時に測定します（図 8）。

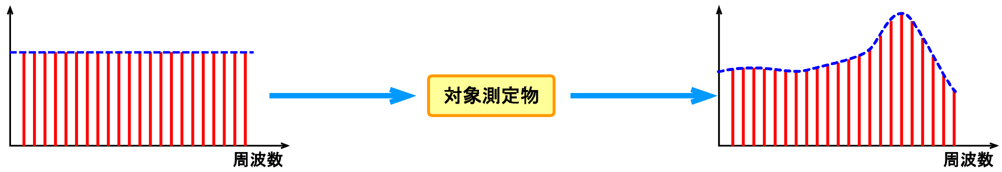


図 8　FFT 法の測定原理

FFT 法に用いられる信号源は、**ランダムノイズ**、**擬似ランダムノイズ**、**スウェプトサイン（チャープサイン）**、**インパルス**で、これらの信号は、分析周波数にわたってすべて同じパワーの周波数成分を含みます。

本方式の特徴は；

(1) 着目する帯域を同時に求めるので、高速に系の特性が測定可能
(2) 分析結果はリニア分解能しかできない
(3) 伝達関数の信頼度を確認できる**コヒーレンス関数**も同時に求めることができる

です。

最後に、伝達系の具体的な計測事例を紹介します。

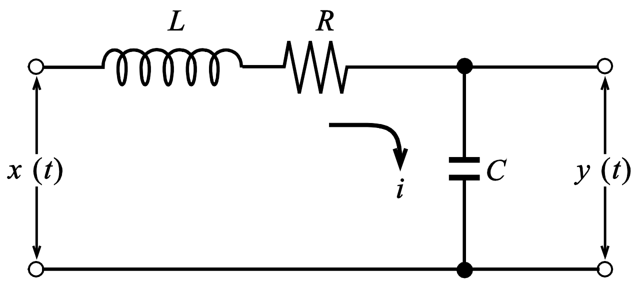


図 9　２次遅れ要素系（電気）

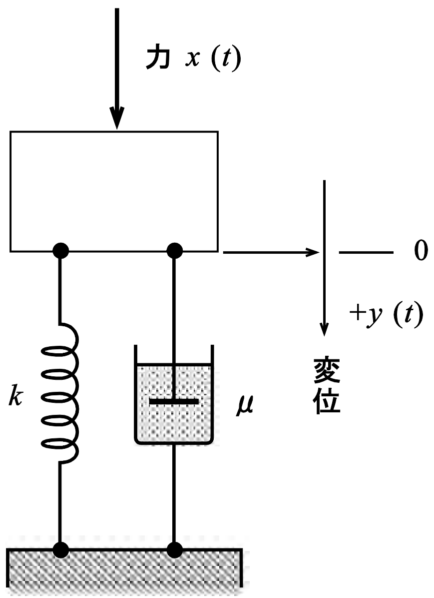


図 10　２次遅れ要素系（機械）

図 9 は、電気系の **LCR 共振回路**、図 10 は、機械系の **1 自由度共振系**の例で、どちらも、２次遅れ要素系の伝達関数として表現できます。

２次遅れ要素系の伝達関数の**標準形**は、ラプラス変換を用いて；

$$G(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$\omega_n(=2\pi f)$：**固有角振動数**、$\zeta$ ：**減衰比**、$K$：**ゲイン定数**

となります。

図 9（電気系）において、$L$：コイル、$R$：抵抗、$C$：コンデンサーとすると；

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + R/L\, s + 1/LC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ここで、

$$\omega_n = 1/\sqrt{LC}、\ \xi = R/2\sqrt{C/L}、\ K = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

とおくと；

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

となり、式（8）は式（5）に等しくなります。

同じように、図 10（機械系）において、 $m$：質量、$\mu$：粘性減衰係数、$k$：バネ定数とすると；

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k} = \frac{1/m}{s^2 + \mu/m\, s + k/m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで；

$$\omega_n = \sqrt{k/m}、\ \zeta = \mu/2\sqrt{mk}、\ K = 1/m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

とおくと、式（9）は式（5）；

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

と等しくなります。

実際に、サーボアナライザを使って図 9 の回路系伝達特性（式（8））を計測してみます。
式（8）を周波数の関数とするために、$s = j\omega$（$\omega = 2\pi f$ ）とおくと；

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\omega / \omega_n\right)^2 + j\,2\zeta\left(\omega / \omega_n\right)} \quad \text{.................................}（11）$$

式（11）の $G(j\omega)$ は、減衰比 $\zeta$ の値によってグラフの形が変わります。

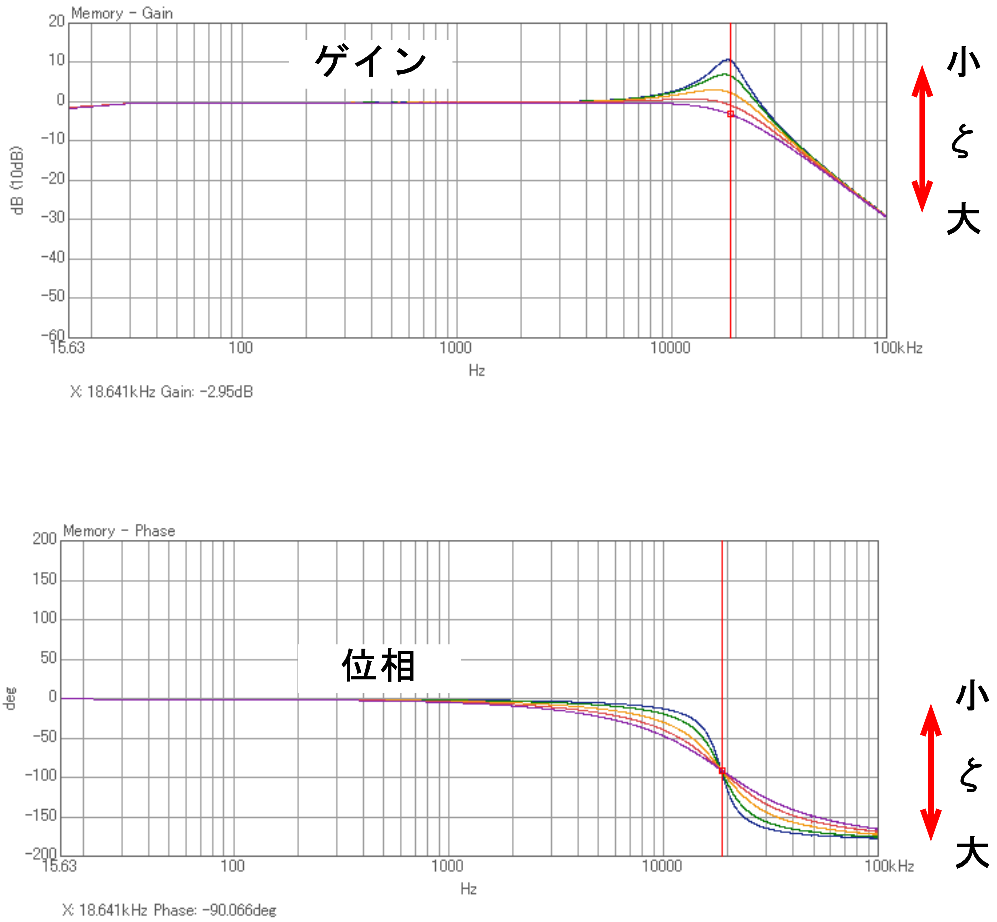


図 11　ζを変化させ重ね書きしたボード線図

図 11 は、図 9 の伝達系で ζ を変化させて測定して重ね書きしたボード線図です。この例では、L=約 800（$\mu$H）、C=約 0.1（$\mu$F）ですから、固有角振動数 $\omega_n$ は 18.64 kHz となっていることが確認できます。また、この回路は、共振特性を持つローパスフィルタであることが周波数特性からわかります。

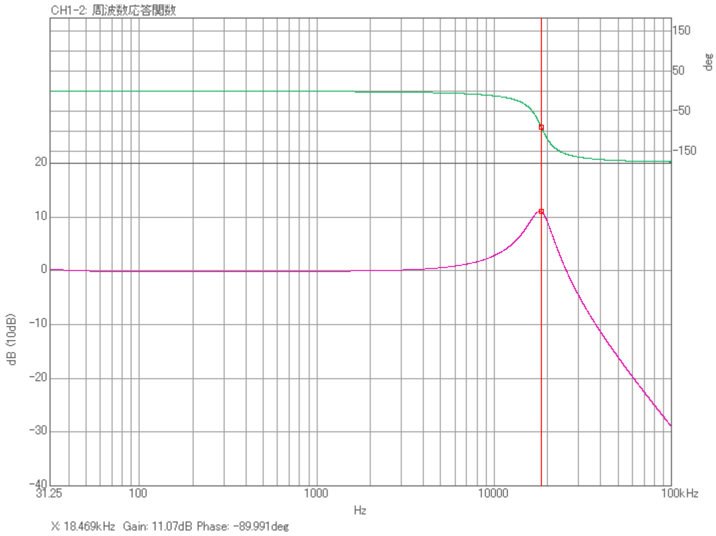


図 12　ボード線図の実測例

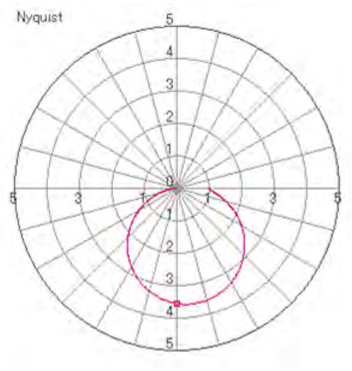


図 13　ナイキスト線図実測例

サーボアナライザ DS-0342 で実測したボード線図（図 12）とナイキスト線図（図 13）の測定例です。

最後に、まとめです。

(1) 線型系に一定の周波数の正弦波を加えると出力も同じ周波数となり、入出力の振幅比を伝達関数のゲイン、位相差を伝達関数の位相となります。
(2) 伝達関数は複素関数で、そのゲインと位相は、実数部と虚数部で表すことができます。
(3) 伝達関数の図示方法は、ボード線図、ナイキスト線図、コクアド線図などがあり、最も使いやすく重要なのはボード線図です。
(4) 周波数の関数としての伝達関数を算出する方法は、FRA 法と FFT 法があります。
(5) 電気系の LCR 共振回路や機械系の１自由度共振系は２次遅れ要素系の伝達関数となり、２次の標準形として表すことが出来ます。

**【キーワード】**
伝達関数、ラプラス変換、定常応答、ゲイン、位相、周波数応答、実数部、虚数部、複素平面、ゲイン特性、位相特性、ボード線図、共振周波数、ナイキスト線図、ベクトル軌跡、コクアド線図、ニコルス線図、ゲイン位相線図、FRA 法、FFT 法、フーリエ積分、オートレンジ、ログサインスイープ、ランダムノイズ、疑似ランダムノイズ、スウェプトサイン、チャープサイン、インパルス、コヒーレンス関数、LCR 共振回路、１自由度共振系、２次遅れ要素系、標準形、固有角振動数、減衰比、ゲイン定数、粘性減衰係数、ばね定数

---

**【参考資料】**

1. 「２チャンネル FFT アナライザ活用マニュアルⅡ」城戸健一著　日本プラントメンテナンス協会（1985 年）
2. 「自動制御入門」稲葉正太郎著　丸善株式会社（1967 年）

以上
（Hima）