計測コラム　　emm156 号用

基礎からの周波数分析（17）－「伝達関数」

前回は、2ch 間の周波数関数であるクロススペクトルについてお話しましたが、今回は、その続きとして、FFT アナライザにおいて 2ch 系関数で最も重要なかつ最も実用的な価値の高い「伝達関数」について、お話します。そして、そのクロススペクトルの重要な応用である「クロススペクトル法」により、伝達関数を算出する方法を紹介します。

【注意】
一般に、伝達関数とは、系（システム）の入出力の関係を表す関数で、入出力信号の**ラプラス変換**の比として定義されますが、ここでは、周波数の関数である**周波数伝達関数（周波数応答関数）**について説明します。

計測コラム emmm134 号「フーリエ変換と畳み込み」で説明したように、線形系の図 1 を再掲します。

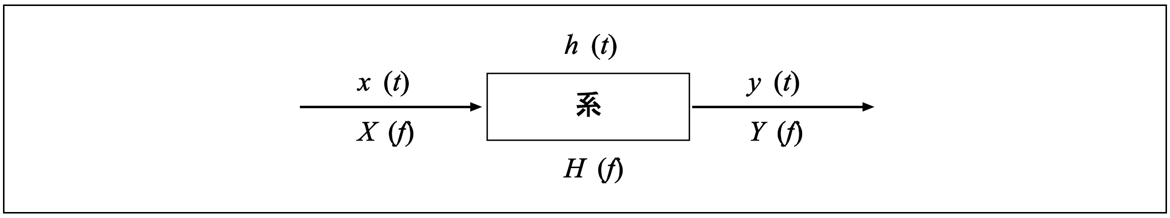

図 1　線形系における時間関数とそのフーリエ変換

ここで、入力時間信号 $x(t)$をインパルス応答 $h(t)$となる線形系に加えてその出力時間信号を $y(t)$とすると；

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,h(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{..............................}\ (1)$$

すなわち、出力時間信号は入力時間信号と系のインパルス応答との**畳み込み積分**で表すことが出来ます。

さらに、$x(t)$ $h(t)$ $y(t)$のフーリエ変換をおのおの $X(f)$ $H(f)$ $Y(f)$とすると、**畳み込み定理**により；

$$Y(f) = X(f)\,H(f) \qquad \text{..............................}\ (2)$$

となります。

式（2）から；

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \qquad \text{..................................} \quad (3)$$

式（3）の $H(f)$を**伝達関数**と呼びます。FFT アナライザでは、**周波数応答関数（Frequency Response Function、FRF）**とも呼びます。伝達関数は、系の周波数軸上における伝達特性を表していて一般に複素数の関数です。

現実的な計算では、**パワースペクトル**や**クロススペクトル**の推定計算と同じように平均処理が必要ですが、式（3）に平均処理を加えることにより；

$$H(f) = \frac{\overline{Y(f)}}{\overline{X(f)}} \qquad \text{..................................} \quad (4)$$

あるいは；

$$H(f) = \overline{\left(\frac{Y(f)}{X(f)} \right)} \qquad \text{..................................} \quad (5)$$

ここで、上部のバーは集合平均（加算平均）を意味します。

伝達関数の推定計算は式（4）あるいは式（5）で行うのでしょうか？

実際の FFT アナライザでは、以下の理由により、伝達関数計算は、上記の式 (4) でも式 (5) でもありません。

1. 非同期なフーリエスペクトルの平均は正しく求められない
   （位相がランダムとなるため、0 に収束する）
2. 系の SN 比の改善とならない

実際の計算は、式（3）の右辺の分母と分子に入力信号 $x(t)$のフーリエスペクトルの複素共役 $X(f)^*$を掛けて；

$$H(f) = \frac{Y(f)\,X(f)^*}{X(f)\,X(f)^*} = \frac{C_{xy}(f)}{P_{xx}(f)} \qquad \text{..................................} \quad (6)$$

となります。

すなわち、系の入出力のクロススペクトル $C_{xy}(f)$ を入力のパワースペクトル $P_{xx}(f)$ で割った式で計算されます。さらに、伝達関数の推定計算は；

$$H(f) = \frac{\overline{C_{xy}(f)}}{\overline{P_{xx}(f)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{（7）}$$

となります。前回述べたように、クロススペクトルの平均化処理は、ノイズ低減効果があるので、伝達関数の推定計算は、通常式（7）で行います。これを、**クロススペクトル法**と呼びます。

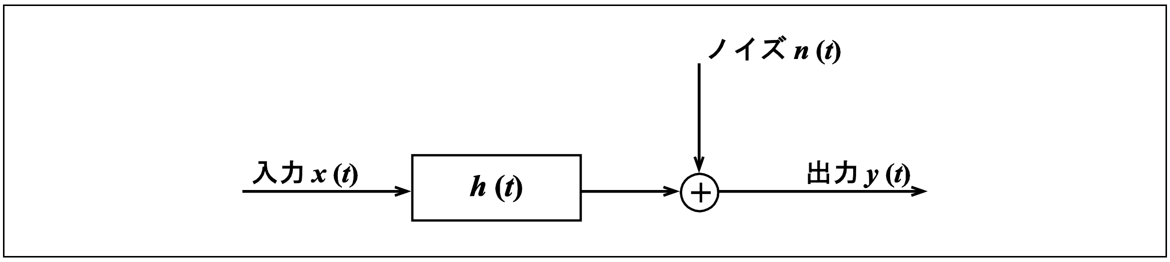

図 2　出力にノイズ成分が加わった伝達系の例

図2にあるように、入力 $x(t)$ と無関係なノイズ成分 $n(t)$ が出力に混入している伝達系 $h(t)$ を考え、その出力を $y(t)$ とすると；

$$Y(f) = X(f)H(f) + N(f) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{（8）}$$

となります。

$$\frac{C_{xy}(f)}{P_{xx}(f)} = \frac{X(f)^*\left(X(f)H(f) + N(f)\right)}{X(f)^*X(f)} = \frac{P_{xx}(f)H(f) + C_{xn}(f)}{P_{xx}(f)} \qquad \text{（9）}$$

ここで、十分平均化を行うことにより、$C_{xn}(f)$ は 0 に収束しますから；

$$\frac{\overline{C_{xy}(f)}}{\overline{P_{xx}(f)}} = \frac{\overline{P_{xx}(f)}H(f) + \overline{C_{xn}(f)}}{\overline{P_{xx}(f)}} = H(f) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{（10）}$$

よって、式（7）での推定方法が、図 2 のような伝達系では有効であることが分かります。さらに、誤差を最小化する方法を考えて、式（8）での誤差成分 $N(f)$ の期待値（平均値）を $E(f)$ とすると；

$$\left|E(f)\right|^2 = \overline{\left|Y(f) - X(f)H(f)\right|^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{（11）}$$

これを最小にする $H(f)$ の推定値を $\hat{H}(f)$ とすると；

$$\frac{\partial |E(f)|^2}{\partial H(f)^*} = 0 \quad \text{より} \quad -\overline{X(f)^* \left(Y(f) - X(f)\hat{H}(f) \right)} = 0 \qquad \text{......................} \quad (12)$$

これから；

$$\hat{H}(f) = \frac{\overline{X(f)^* Y(f)}}{\overline{X(f)^* X(f)}} = \frac{\overline{C_{xy}(f)}}{\overline{P_{xx}(f)}} \qquad \text{......................} \quad (13)$$

このように、**最小 2 乗近似**の手法からも、式 (7) が推定値として妥当であることが分かります。

これらのことをまとめて、伝達関数の推定方法として式（7）を採用する理由は；

1. クロススペクトル法により SN 比の改善が図れる
2. 出力に外部ノイズがあるとき、平均化によりランダム誤差を最小化可能
3. 最小 2 乗近似法により、ランダム信号を利用して非線形系に適用して線形近似が可能
4. FFT アナライザで、スペクトル計算の 2 次処理として簡単に計算可能

など、あります。

最後に、実際の FFT アナライザでの伝達関数推定の流れを図 3 にまとめます。

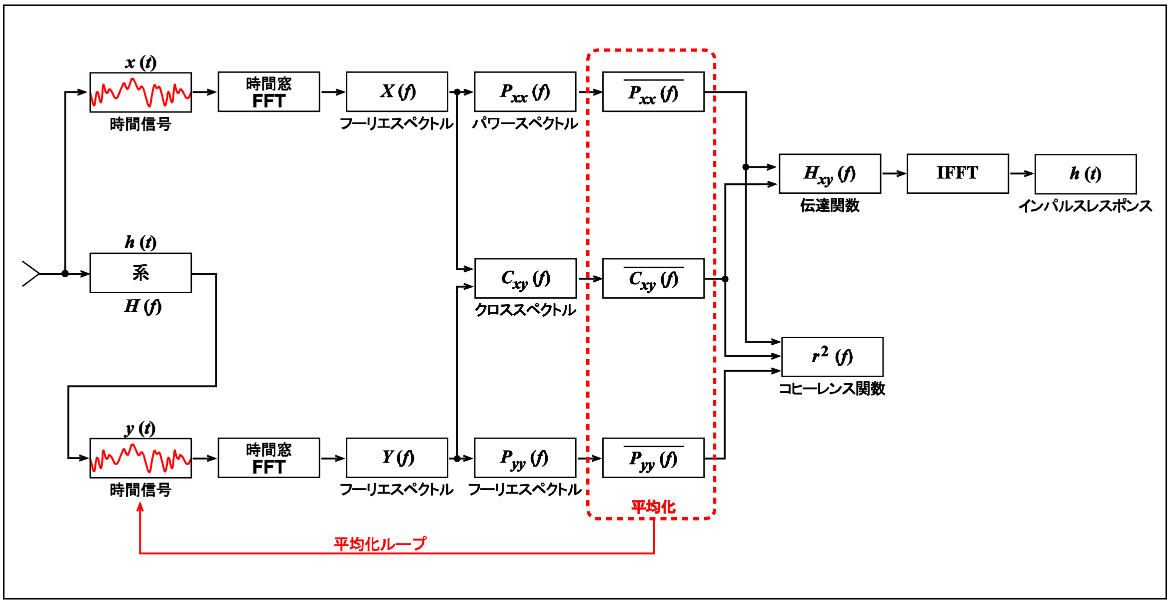

図 3　FFT アナライザでの伝達関数推定計算の流れ

2ch の時間信号の収録とスペクトル（パワーとクロス）平均までが平均化処理のループとなっており、伝達関数の計算は、パワースペクトル（2ch 分）とクロススペクトル推定結果からの**後処理計算**です。また、伝達関数だけでなく、伝達関数の信頼度チェックに使える**コヒーレンス関数** $\gamma^2(f)$ も計算可能です。コヒーレンス関数に関しては、次回に述べます。

さらに、算出された伝達関数を逆変換（IFFT）することにより、元の系の**インパルスレスポンス**も得られます。

最後に、まとめです。

(1) 線形系の出力は、系のインパルスレスポンスと入力信号との畳み込み積分で表されます。
(2) 系の伝達関数は、入出力信号のフーリエスペクトルの比と定義でき、一般に複素数の関数です。
(3) FFT アナライザでの実際の伝達関数推定方法は､入出力のクロススペクトルの推定値を入力のパワースペクトル推定値で除算して求め、この方法をクロススペクトル法と呼びます。
(4) クロススペクトル法による伝達関数推定は、ランダム誤差を最小化したり、非線形系を線形近似できるなどのメリットがあります。
(5) FFT アナライザでのスペクトル推定の後処理として､伝達関数だけでなくコヒーレンス関数も算出できます。

【キーワード】
ラプラス変換、インパルス応答、畳み込み積分、畳み込み定理、伝達関数、周波数応答関数、FRF、パワースペクトル、クロススペクトル、クロススペクトル法、最小 2 乗近似、後処理計算、コヒーレンス関数

【参考資料】
1. 「ディジタルフーリエ解析（2）－上級編－」城戸健一著　コロナ社（2007 年）
2. 「信号処理」森下巌・小畑秀文著　計測自動制御学会（19825 年）

以上
（Hima）