

基礎からの周波数分析（12）－「パワースペクトル（その1）」

前回のフーリエスペクトルに続いて、今回はパワースペクトルについてお話しします。

スペクトル解析の主要な目的は、パワースペクトルを計測することであり、電気計測器としての FFT アナライザで最も基本的で重要な関数です。それ故、パワースペクトルは 2 回に分けてお話しします。今回はその 1 です。

パワースペクトルは、周波数の関数であり、元の時間信号に含まれる周波数毎の単位時間当たりのエネルギーすなわち**パワー（信号の強さ）**を表しています。

スペクトル解析など信号処理の分野での“パワー”とは、時間信号の**2乗平均値**を指します。

例えば、周期 T の時間信号 $x(t)$ の 2 乗平均値 $\overline{x^2}$ は；

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

あるいは、周期のない時間信号 $x(t)$ の 2 乗平均値 $\overline{x^2}$ は；

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表すことが出来ます。

一般に、時間信号は**確定信号**と**非確定信号**に大きく分類できます。確定信号とは、周期信号のように時間の関数として記述できる信号であり、非確定信号とは、ランダム信号（不規則信号）のように明確に数式で記述できず確率的な信号です。

まず周期 T の周期信号 $x(t)$ について考えると、複素フーリエ級数展開により；

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表現できます。ここで c_k は、前々回（メルマガ 144 号）のコラムで出てきた**複素フーリエ係数**です。（周波数データとして引数を k としています。）

次に、式 (3) の両辺を 2 乗して周期 T で平均をとると、複素指数関数の直交性から下記の式 (4) となります。

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

または、正の周波数成分と負の周波数成分の大きさは等しいので；

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $P(k) = 2|c_k|^2 (k=1, 2, 3)$ 、 $P(0) = c_0^2$ とおくと、式 (5) は；

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となります。式 (6) は、周波数毎の成分 $P(k)$ の総和が時間信号 $x(t)$ のパワー (左辺) となるので、周波数関数 $P(k)$ をパワースペクトルと呼びます。パワースペクトルは、フーリエスペクトル (または、複素フーリエ係数) と違い、位相情報が失われます。

この $P(k)$ を、FFT 演算を使って求める手順を説明します。

前々回の計測コラム「フーリエスペクトル」であげた下記の式 (7) を例とします。

$$x(n) = A \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn - \frac{\pi}{4}\right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

上式 (7) において、 $N=64$ 、 $k=4$ を代入して N 点 FFT 演算すると、フーリエスペクトルは、表 1 のような計算結果となります。

表 1 式 (7) に $N=64$ 、 $k=4$ を代入した計算結果

周波数点 (k)	実数部	虚数部
$k=4$ (正の周波数)	$\frac{A}{2\sqrt{2}} 64$	$-\frac{A}{2\sqrt{2}} 64$
$N-k=60$ (負の周波数)	$\frac{A}{2\sqrt{2}} 64$	$-\frac{A}{2\sqrt{2}} 64$

この結果から、時間窓長 T ($T=N\tau$ で、 τ を省略した $N=64$) で除算して；

$$P(4) = 2|c_4|^2 = 2 \left[\left(\frac{A}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{A}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{A^2}{2} \dots\dots\dots (8)$$

と求められます。これは、式 (7) の $x(t)$ の 2 乗平均値と等しくなり、式 (6) が確認されたこととなります。

実際の FFT アナライザでは、有限で離散的なフーリエ変換ですから、前々回説明したように、理論的には N 点の時間データから $N/2$ 点までのパワースペクトルが求めることができますが、アンチエイリアシング (折り返し防止) フィルタの関係から、これより少し小さめの $N/2.56$ 点まで計測できる仕様になっています。例えば、 $N=64$ の時は、 $64/2.56=25$ 点まで求めています。(実際には、DC 成分もあり 26 点ですが・・・) これらの関係は、図 1 と図 2 を参考にして下さい。

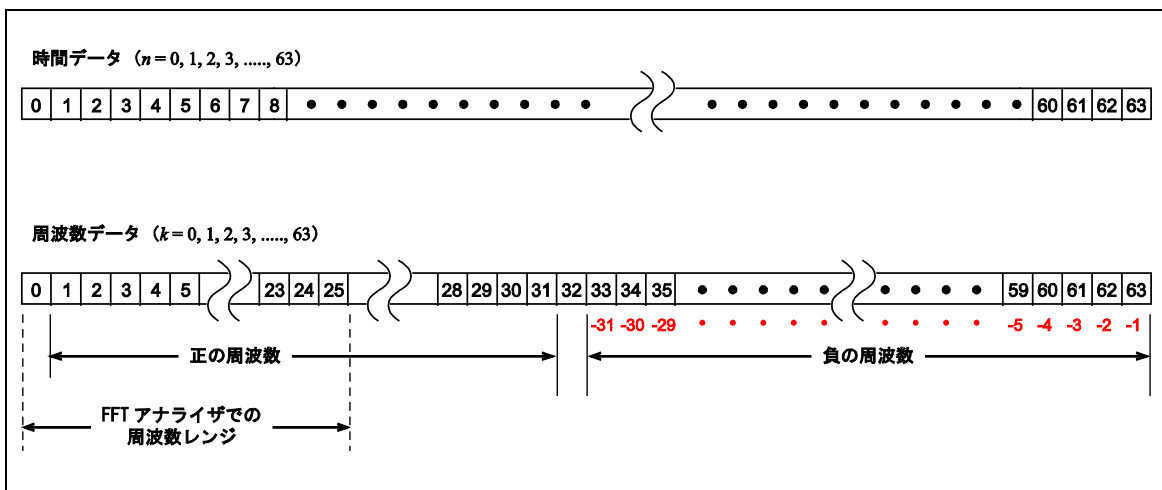


図 1 FFT 演算における周波数並び ($N=64$ の場合)

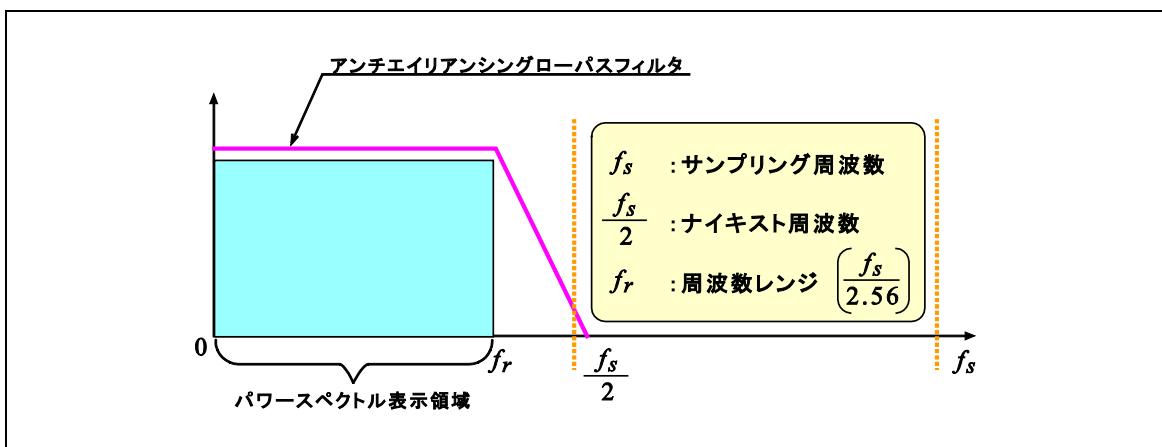


図 2 サンプル周波数と周波数レンジの関係

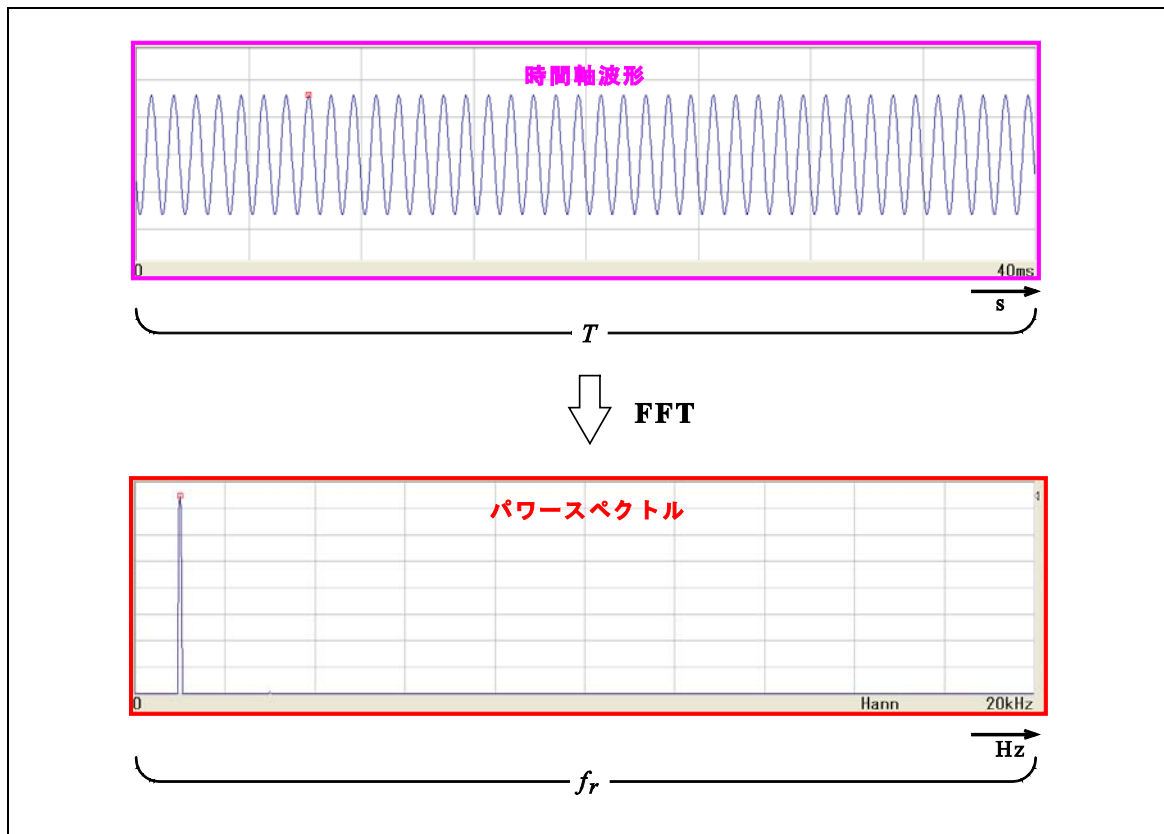


図3 時間波形とFFT処理したパワースペクトル

ここで、時間波形とパワースペクトルの関係についてまとめます。

図3において、サンプリング周波数 f_s でサンプルした N 点の時間波形(上図)を、 N 点FFTを実行して下図のパワースペクトルを求めたとします。

- 時間軸

1. 時間分解能 $\tau = 1/f_s$
2. サンプリング点数 N
3. 時間窓長 $T = N\tau = N/f_s$

- 周波数軸

1. 周波数レンジ $f_r = f_s/2.56$
2. 分析ライン数 $L = N/2.56$
3. 周波数分解能 $\Delta f = f_r/L = f_s/N = 1/T$

最後の式から、パワースペクトルの周波数分解能 Δf をあげる（小さく）するためには、サンプリング周波数 f_s を小さくするか、サンプリング点数 N を大きくするかのいずれかであることがわかります。

また、上記の関係式でなぜ“2.56”という定数を使うかですが、通常 FFT 点数は2のべき乗で実行しますので、周波数分解能を割り切れるきれいな数としたいためです。

小野測器の FFT アナライザで使えるサンプリング点数 N とそれに対応した分析ライン数 L は、下記の表2です。

表2 サンプリング点数と分析ライン数

2のべき乗	サンプリング点数 N (時間軸)	分析ライン数 L (周波数軸)
6	64	25
7	128	50
8	256	100
9	512	200
10	1024	400
11	2048	800
12	4096	1600
13	8192	3200
14	16384	6400

今回は、パワースペクトル（その2）として、PSD と ESD についてお話しします。

最後に、まとめです。

- (1) スペクトル解析の主な目的は、パワースペクトルを求めることです。
- (2) パワースペクトルは、元の時間信号に含まれる周波数毎の単位時間当たりのエネルギーすなわちパワー（信号の強さ）を表しています。また、位相情報は持たない正の実数値です。
- (3) 一般にパワーとは、時間信号の 2 乗平均値（実効値の 2 乗）であり、パワースペクトルはそのパワーを周波数毎に分解したものであるとすることができます。
- (4) N 点の時間波形から、原理的には $N/2$ 点までのパワースペクトルが得られますが、実際の FFT アナライザにおいては、それより少ない分析ライン数である $N/2.56$ まで求めています。
- (5) パワースペクトルはある周波数分解能 Δf で分析されますが、その分解能をあげる（良くする、小さくする）ためには、サンプルする時間窓長 T を大きくする必要があります。すなわち、サンプリング周波数 f_s を低くするか、サンプリング点数 N を大きくするかのどちらかです。

【キーワード】

スペクトル解析、フーリエスペクトル、パワースペクトル、パワー、信号の強さ、2 乗平均値、確定信号、非確定信号、複素フーリエ係数、アンチエイリアシングローパスフィルタ、周波数分解能

【参考資料】

1. 「スペクトル解析」日野幹雄著 朝倉書店（1977 年）
2. 「デジタルフーリエ解析（I）－基礎編－」城戸健一著 コロナ社（2007 年）

以上
(Hima)