計測コラム　　emm142 号用

基礎からの周波数分析（10）－「離散フーリエ変換（DFT）その２」

前回、高速フーリエ変換（FFT）について説明しましたが、FFT は離散フーリエ変換（DFT）を単に高速に演算する算法に過ぎないので、今回は引き続き DFT のいろんな性質に関してお話しします。なお、今後の説明で DFT 演算は、FFT を使っていることを前提とします。

前々回（emm 138 号）で説明したように、N 点の時間信号 x_n を DFT することにより、同じく N 点の周波数関数 X_k が得られます。さらに、時間信号 と周波数関数 の両方とも、N 点を１周期とする周期的な関数となります（図１参照）。

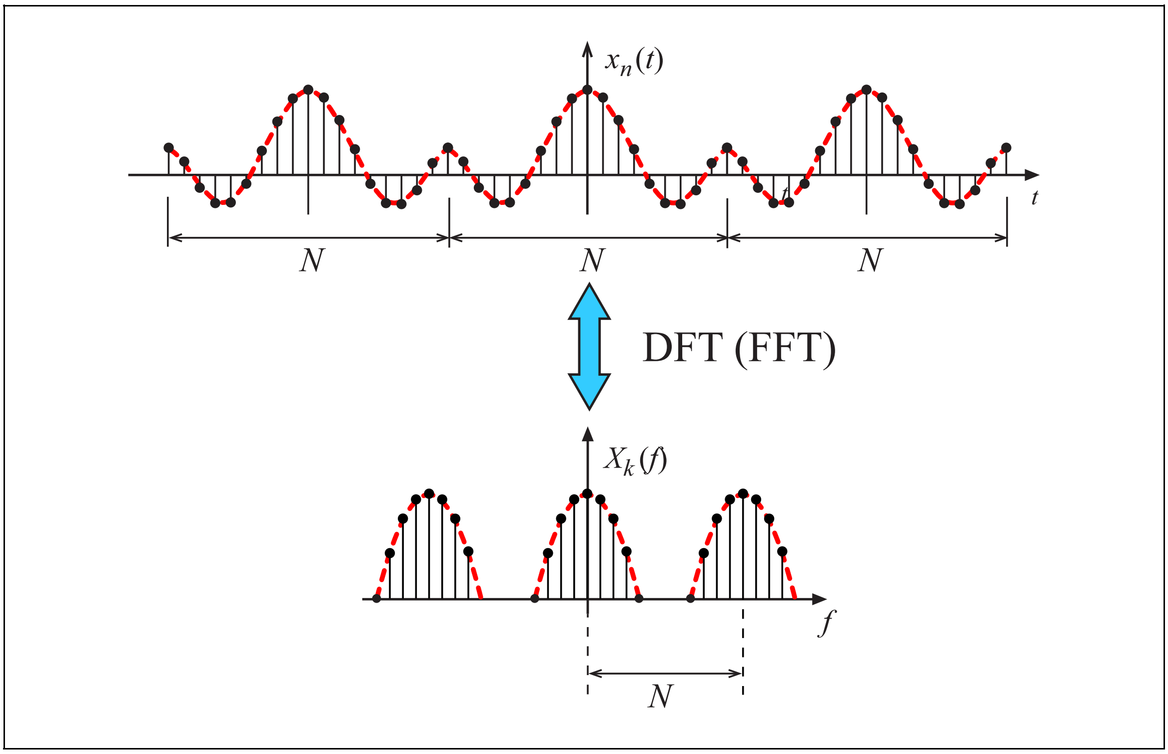

図１　N 点時間関数を x_n を DFT した N 点周波数関数 X_k

DFT の定義式を再掲します。

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{(1)}$$

ここで、 $n = 0, 1, \cdots, N-1$、 $k = 0, 1, \cdots, N-1$

複素フーリエ級数で説明したように、フーリエ変換すると正負の周波数が現れますが、DFT では、図 1 で明らかなように、N 点の後半は負の周波数に相当します。周波数関数 X_k を $X(k)$ と書くと；

$$X(N-k) = X^*(k) \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここで、* は複素共役を表す

式（2）の証明は、x_n は実数ですから；

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi}{N}n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi n + j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$
$$= X^*(k)$$

すなわち、周波数関数 X_k の複素数データ列は、$k = N/2$ に関して実数部は線対称、虚数部は点対称、あるいは、$k = N/2$ に関して、絶対値が同じで位相は符号だけが逆となります（図 1 の下の図は、絶対値を表していることに注意してください）。

「時間信号のサンプリング」（emm 136 号）でのサンプリング定理でも理解できるように、N点の時間データから、$N/2$ 点の複素数の周波数データが得られることになります。図 2 は、N = 64 点の時間データをDFT（FFT）することにより、同じくN点の周波数データ（複素数）が得られ、正の周波数と負の周波数のデータ並びを表しています。

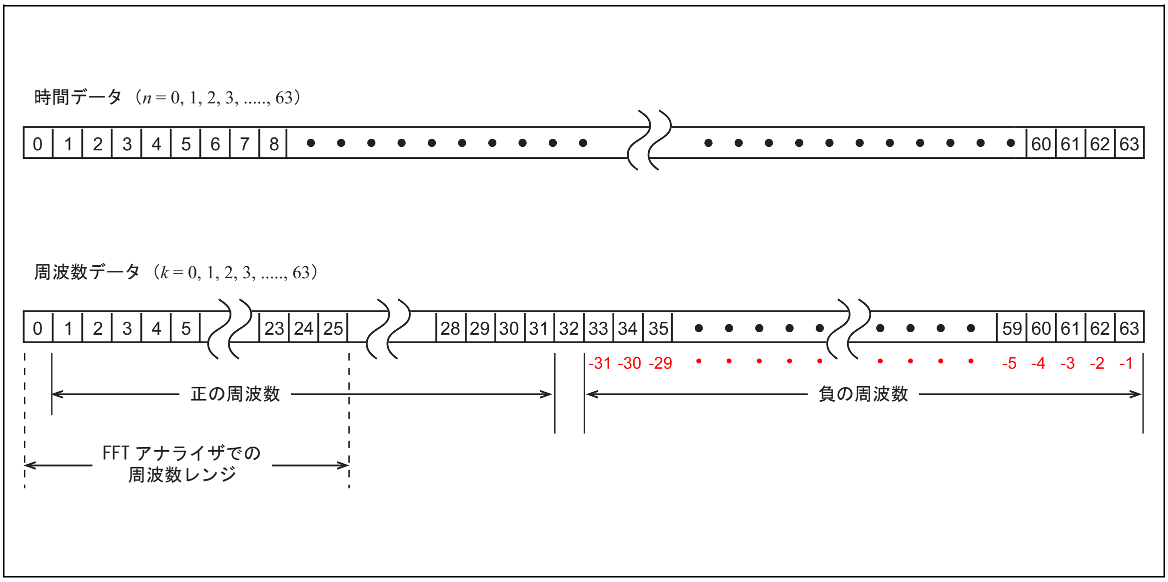

図 2　DFT（FFT）における周波数領域のデータ並び（N = 64 の例）

実際の DFT の計算方法ですが、式 (1) において時間関数 x_n は複素数データとして扱われ、通常時間データは実数なので虚数部に 0 データを付加して N 点の複素数時間データに変換して演算を実行しています。

これらの DFT に関する機能や性質を利用して、2ch の実数時間データを 1 回の DFT（FFT）で効率よく演算処理する方法を紹介します。

2 つの N 点の実数時間関数 $x\ (n)$ と $y\ (n)$ に対して以下の複素数時間関数 $z\ (n)$ を定義します。

$$z(n) = x(n) + j\,y(n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで、$n = 0, 1, \cdots, N-1$

式（3）の右辺の DFT は、その線形性の性質より；

$$\begin{aligned} Z(k) &= X(k) + j\,Y(k) \\ &= XR(k) + j\,XI(k) + j\left(YR(k) + j\,YI(k)\right) \\ &= \left[XR(k) - YI(k)\right] + j\left[XI(k) + YR(k)\right] \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

実際の計算で得られた DFT の結果を；

$$Z(k) = ZR(k) + j\,ZI(k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

とすると、式（4）と式（5）を比較して

$$ZR(k) = XR(k) - YI(k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$ZI(k) = XI(k) + YR(k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となることが分かります。

時間関数 $x\ (n)$ と $y\ (n)$ はともに実数なので、それらの周波数データは式（2）の複素共役の関係が成り立ちますので、式（6）から；

$$XR(k) = \frac{ZR(k) + ZR(N-k)}{2}$$

$$YI(k) = \frac{ZR(k) - ZR(N-k)}{2}$$

また、式（7）から；

$$XI(k)=\frac{ZI(k)-ZI(N-k)}{2}$$
$$YR(k)=\frac{ZI(k)+ZI(N-k)}{2}$$

この結果より、時間関数 $x\ (n)$ の DFT $X\ (k)$ は；

$$X(k)=\frac{ZR(k)+ZR(N-k)}{2}+j\frac{ZI(k)-ZI(N-k)}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots (8)$$

ここで、 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ N/2$

また、時間関数 $y\ (n)$ の DFT $Y\ (k)$ は；

$$Y(k)=\frac{ZI(k)+ZI(N-k)}{2}-j\frac{ZR(k)-ZR(N-k)}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで、 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ N/2$

となります。

このように、FFT 演算した後に最後に式（8）と式（9）の演算をすることにより、2ch の時間関数の DFT を 1 回の FFT で実行することが出来ます。また、これから、N 点の複素数時間データから、同じく N 点の有効な複素数周波数データが得られることが理解できます。

さらに、2N 点の 1ch 時間データを前半と後半（あるいは偶数値と奇数値）部分に分解してそれを実数部と虚数部とみなして N 点の複素数時間データとして、2N 点の時間データの DFT を 1 回の N 点 FFT で求める方法もあります。

次回は、DFT を使って、FFT アナライザでは、どのように周波数軸上の関数を計算しているかをご説明します。

最後に、まとめです。

(1) N 点の時間信号 x_n を DFT することにより、同じく N 点の周波数関数 X_k が得られ、時間信号 x_n と周波数関数 X_k の両方とも、N 点を 1 周期とする周期的な関数となります。
(2) DFT では、N 点の周波数データのうち、前半が正の周波数領域で後半が負の周波数領域となります。
(3) 周波数関数 X_k の複素数データ列は、$k = N/2$ に関して実数部は線対称、虚数部は点対称、あるいは、$k = N/2$ に関して、絶対値が同じで位相は符号だけが逆となります
(4) DFT の性質を利用して、2ch の実数時間データを 1 回で FFT する方法や 1ch の $2N$ 点の時間データを 1 回の N 点 FFT で求める方法など、効率的な演算が可能です。

【キーワード】
DFT（離散フーリエ変換）、FFT（高速フーリエ変換）、複素共役、サンプリング定理

【参考資料】

1. 「高速フーリエ変換」E. ORAN BRIGHAM 著　科学技術出版社
2. 「ディジタルフーリエ解析（I）－基礎編－」城戸健一著　コロナ社

以上
（Hima）