

## 基礎からの周波数分析 (8) - 「離散フーリエ変換 (DFT)」

今回は、今までお話しした内容（フーリエ級数、フーリエ変換、サンプリングなど）を基にして、デジタル信号処理の基本的な演算である**離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform, DFT)** についてお話しします。

図 1-1 及び 1-2 が、これまでの時間領域と周波数領域との関係を含む離散フーリエ変換を導出する説明図です。本シリーズでの前回（計測コラム emm136 号）の図 3 と同様に、図 1-1 では、フーリエ変換対の左側の図が時間領域で右側が周波数領域、図 1-2 では、フーリエ変換対の上側の図が時間領域で下側が周波数領域となっています。

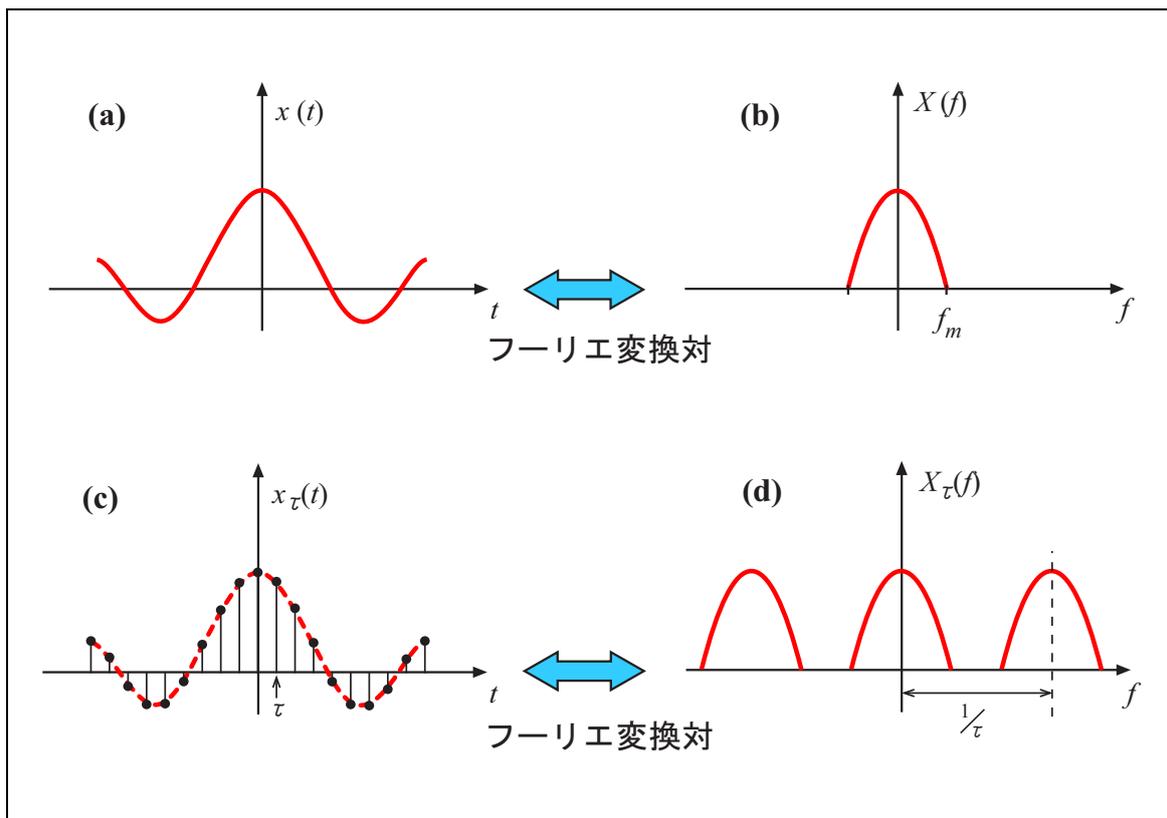


図 1-1 離散フーリエ変換 (DFT) を導出するための説明図

まず、時間信号  $x(t)$  (図 1-1 の (a)) のフーリエ変換した周波数スペクトル  $X(f)$  (図 1-1 の (b)) は最大周波数  $f_m$  で帯域制限されているとします。  $X(t)$  をサンプリング周期  $\tau$  (サンプリング周波数  $1/\tau$ ) でサンプルした離散的な信号を  $x_\tau(t)$  (図 1-1 の (c)) とすると、そのフーリエ変換  $X_\tau(f)$  は、図 1-1 の (d) のように周波数  $1/\tau$  で繰り返すスペクトルとなります。

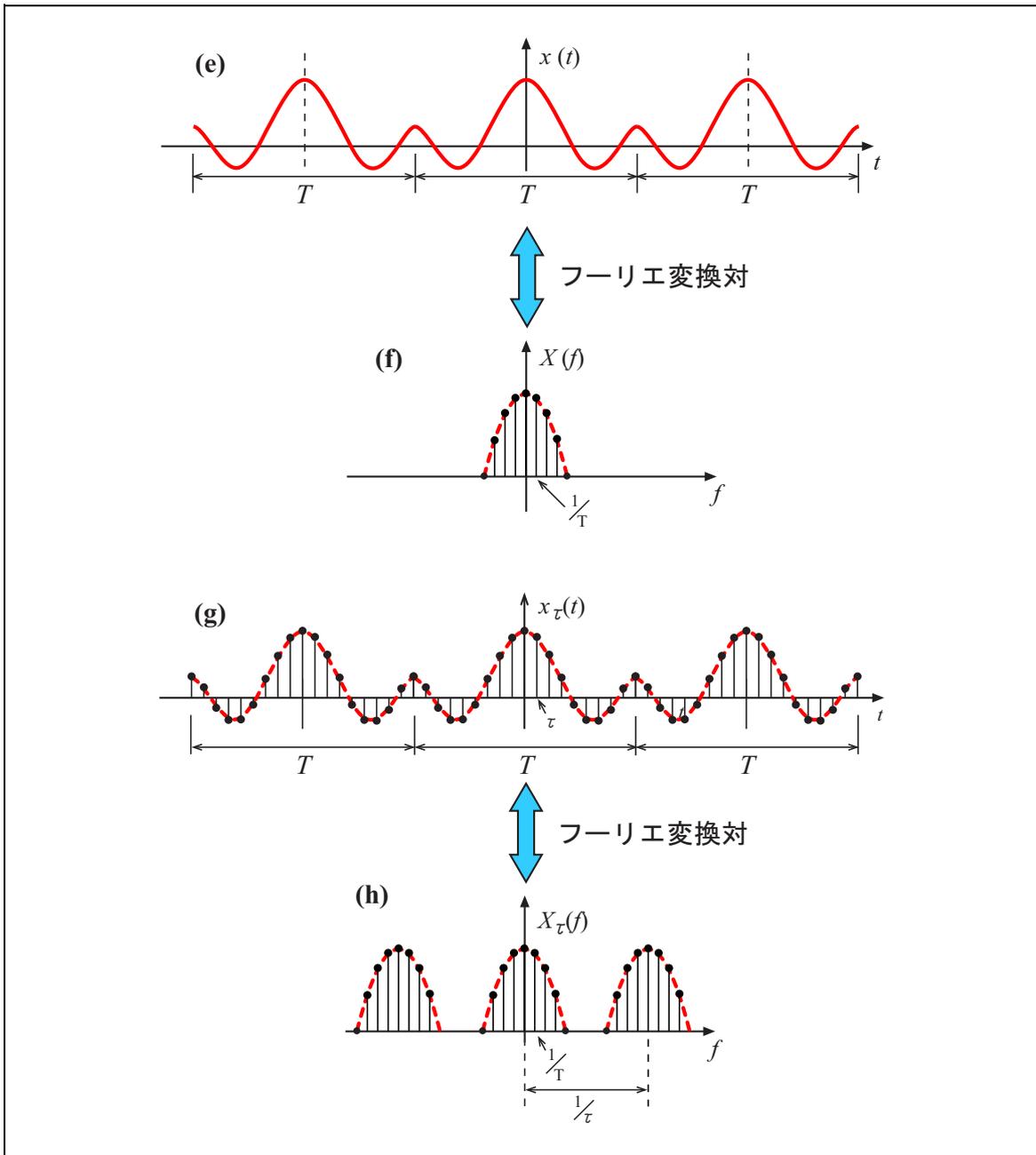


図 1-2 離散フーリエ変換 (DFT) を導出するための説明図

次に、時間信号  $x(t)$  が有限の長さ  $T$  の信号の場合、または無限の信号を時間窓  $T$  で切り取って有限の長さとして（この操作は FFT アナライザでは時間窓にあたる）、信号を周期  $T$  で無限に繰り返す時間信号（図 1-2 の (e)）とみなすと、フーリエ級数展開が適用できて、そのスペクトルは周波数軸上に  $1/T$  間隔で離散的に並ぶ形（図 1-2 の (f)）になります。

ここまでまとめますと、有限長で連続的な時間信号を周期的な関数とみなすと、それに対する周波数領域の関数は離散的なスペクトルとなり、逆に、帯域制限のある連続的な周波数関数を周期的な関数とみなすと、それに対応する時間信号は離散的な信号（サンプルされた時間信号）となることが分かります。

これらの結果から、サンプリング周波数  $1/\tau$  でサンプルされた、有限時間窓長  $T$  の時間信号のフーリエ変換がどうなるかを示した図が、図 1-2 の (g) と (h) です。すなわち、有限時間窓長  $T$  の離散的な時間信号を周期的な関数とみなすと、それに対応する周波数関数も、離散的でかつ有限な周期的関数となります。

このことから、サンプルされた有限の時間信号をフーリエ変換することができ、その結果も有限で離散的な周波数スペクトルが導かれ、ようやくデジタル信号処理によるフーリエ変換である DFT が可能となります。

次に、DFT の計算式を導出します。

時間波形  $x(t)$  をサンプリング周期  $\tau$  でサンプルすると、その時系列は；

$$x(\tau), x(2\tau), x(3\tau), \dots, x(n\tau), \dots$$

となります。この時系列信号  $x_\tau(t)$  は、デルタ関数を使って；

$$x_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) \delta(t - n\tau) \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表すことができます。式 (1) の  $x_\tau(t)$  のフーリエ変換を  $X_\tau(f)$  とすると；

$$X_\tau(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) e^{-jn2\pi f\tau} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となります。ここで、時間信号を有限化します。有限時間窓長を  $T$  とすると、サンプリング周期が  $\tau$  なので、時間データは  $N (= T/\tau)$  点だけ存在してその他は 0 とおきます。

$$x(n\tau) = 0 \quad n < -1 \quad n \geq N \quad \dots\dots\dots (3)$$

これから、 $X_\tau(f)$  は；

$$X_\tau(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau) e^{-jn2\pi f\tau} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$X_\tau(f)$  は、時間信号  $x_\tau(t)$  を周期  $T$  の周期信号とみなすと基本周波数  $1/T$  で離散化されるので、基本周波数を  $f_0 (= 1/T)$  として  $f = k f_0 \quad k=0, 1, \dots, N-1$  とおくと、式 (4) は結局 ;

$$X_\tau(kf_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \dots\dots\dots (5)$$

と変形することができます。式 (5) をサンプルされた時間信号の**離散フーリエ変換 (DFT)** と呼びます。  $N$  点の離散的で有限な (かつ周期的な) 時間信号から DFT 演算によって、同じく  $N$  点の離散的で有限な (かつ周期的な) 周波数関数が得られることとなります。

次に、DFT の逆演算を求めるために、式 (5) の両辺に  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  をかけて離散周波数  $k$  について積分をします。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} X_\tau(kf_0) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} x(m\tau) e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(m\tau) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、複素指数関数の直交性により ;

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = \begin{cases} N & n = m \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となり  $m = n$  の場合だけ考慮すればよいから、式 (6) の右辺は結局  $N x(n\tau)$  となります。

これから ;

$$x(n\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_\tau(kf_0) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) が**離散フーリエ逆変換 (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)** の定義式です。

ここで、簡単に記述するために  $x(n\tau) \rightarrow x_n$   $X_\tau(kf_0) \rightarrow X_k$  と略記すると、式 (5)、式 (7) は；

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \dots\dots\dots (8)$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \dots\dots\dots (9)$$

と表現できます。式 (8) が離散フーリエ変換 (DFT)、式 (9) が離散フーリエ逆変換 (IDFT)、両式が**離散フーリエ変換対**です。

ここで注意することは、時間関数 $x_n$ 、周波数関数 $X_k$ の両方ともN点を1周期とする周期的関数となることです。また、通常のフーリエ変換から離散フーリエ変換を導き出すために特別な数学的近似はしていませんが、DFTを利用するためには大きな制限を仮定しています。それは、時間関数の離散化と有限化です。

第 1 の離散化に関しては、前回に説明したようにサンプルされた時間信号の周波数関数を正しく求めるためには周波数成分が帯域制限されている必要があります。このために FFT アナライザでは**アンチエイリアシングフィルタ**が装備されており、周波数関数は必然的に有限化されることとなります。

第 2 の有限化に関しては、現実的に数値計算するためには有限データしか扱えないこともあります。周波数領域の関数も離散化するためには、たとえ無限の時間関数でも有限に切り取りそしてその有限データをくり返す周期的な関数とみなす必要があります（この切り取りに関しては図 1-2 では省略しています）。この時間信号を有限に切り取る操作を、FFT アナライザでは**時間窓**をかけると呼びます。この有限化の操作による誤差は FFT アナライザを使う上で、最も注意すべき項目の 1 つです。この時間窓の誤差と使い方に関しては後述します。

これらの注意点を考慮して使うことにより、離散フーリエ変換 (DFT) は連続的なフーリエ変換とほぼ同じ結果を導き出すことができ、デジタル信号処理の分野で非常に実用的なかつ強力な計算手法とすることが出来ます。

最後に、まとめです。

- (1) 周期性がなく連続的な時間関数はフーリエ変換により、周波数関数も周期性がなく連続関数となる（フーリエ変換）。
- (2) 離散化された時間関数のフーリエ変換は、周期的な連続周波数関数となる（離散時間フーリエ変換）。
- (3) 周期的な連続的な時間関数のフーリエ変換は、離散的な周波数関数となる（フーリエ級数展開）。
- (4) 離散化されてかつ周期的な（有限な）時間関数のフーリエ変換は、周波数軸上でも同じように離散化されてかつ周期的な（有限な）周波数関数となる（離散フーリエ変換）。
- (5)  $N$  点のデジタル時間データの離散フーリエ変換（DFT）は周波数軸上でも同じく  $N$  点周波数データとなり、どちらも周期  $N$  でくり返す周期関数となる。

#### 【キーワード】

フーリエ級数、フーリエ変換、サンプリング、離散フーリエ変換、DFT、周波数スペクトル、サンプリング周期、サンプリング周波数、離散フーリエ逆変換、IDFT、離散フーリエ変換対、アンチエイリアシングフィルタ、時間窓

#### 【参考資料】

1. 「高速フーリエ変換」 E. ORAN BRIGHAM 著 科学技術出版社
2. 「デジタルフーリエ解析 (I) -基礎編-」 城戸健一著 コロナ社
3. 「信号処理」 森下巖/小畑秀文 共著 朝倉書店

以上  
(Hima)