計測コラム　　emm134 号用

基礎からの周波数分析（6）－「フーリエ変換と畳み込み」

今回は、時間と周波数の間の関係を表現するフーリエ変換の重要な性質の 1 つである「畳み込み」に関してお話しします。

時間信号 $x(t)$ と $h(t)$ との**畳み込み（convolution）**は 2 つの関数の積和演算で、式（1）で定義されます。また、積分で表現するので、**畳み込み積分（convolution integral）**とも呼ばれます。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \text{(1)}$$

$$= x(t) * h(t) \qquad \text{(2)}$$

式（2）は、式（1）の積分を簡素化して表現した形です。

畳み込みの具体的な例として、フィルタなどの電気回路のような線形系（図 1）において、$x(t)$ を入力時間信号、$h(t)$ をその系の特性を表す時間関数とすると、系の出力は式（1）の $y(t)$ となります。

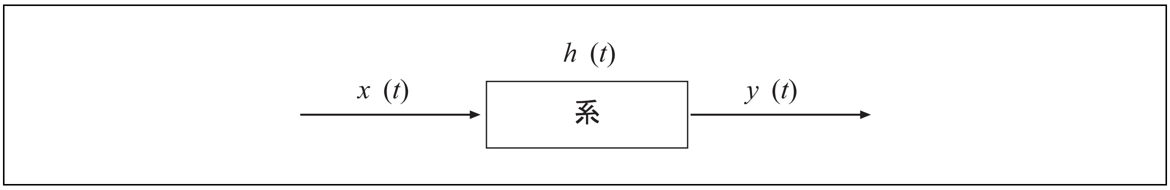

図 1　線形系

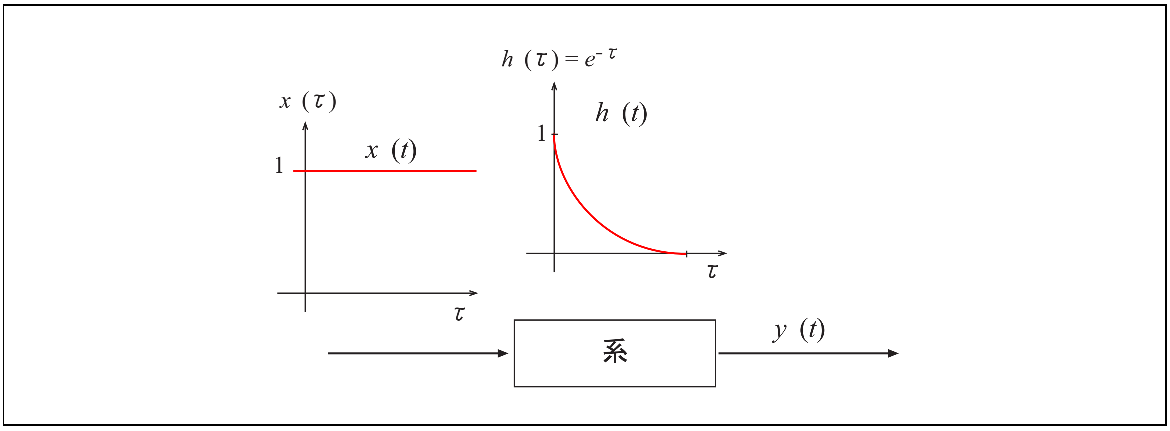

図 2　線形系に信号を入力した場合

ここで、系の特性 $h(t)$が図 2 のような関数の系に、ステップ 1 の信号 $x(t)$を入力した場合に、出力 $y(t)$がどうなるか調べてみます。

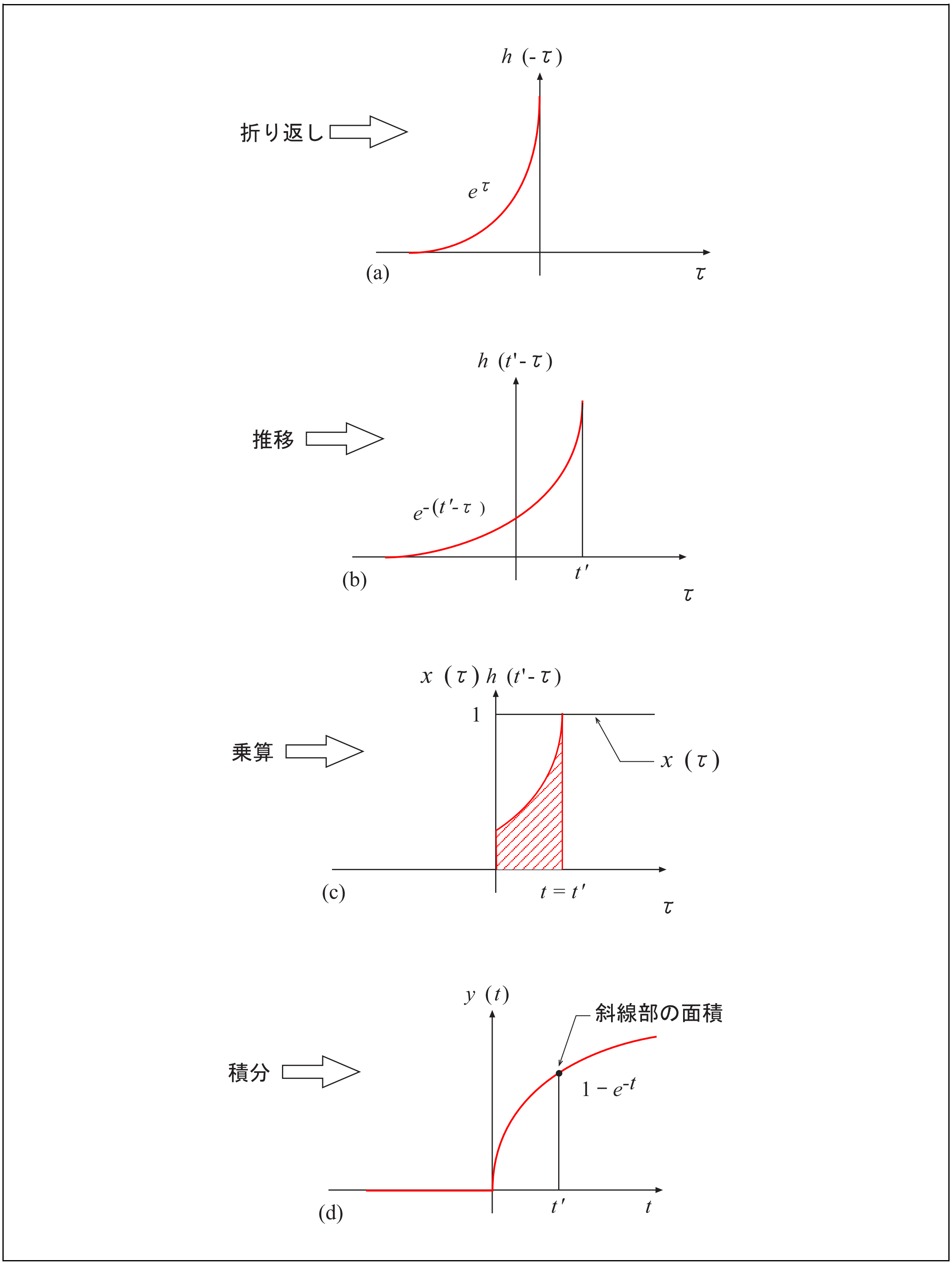

図 3　畳み込み積分の手順の説明

（上図は、$t = t$’　のときの図）

畳み込み積分式（1）の手順は、$h(\tau)$の時間軸を折り返して（図 a)、それを時間軸の正方向へ推移させて（図 b)、$x(\tau)$と乗算をして（図 c)、積分を行うことにより、最終的に図 3 の(d)が出力 $y(t)$となります。

実際に式（1）から計算してみると；

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t 1e^{-(t-\tau)}d\tau = -e^{t}\left[e^{\tau}\right]_0^t = 1-e^{-t} \quad \text{................}\ (3)$$

となることが分かります。

また、説明は省略しますが、式 (1) で $x(t)$ と $h(t)$ を交換した計算式でも同様な結果となります。

すなわち；

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad \text{.................................}\ (4)$$

$$=h(t) * x(t) \quad \text{.................................}\ (5)$$

次に、図 1 の線形系に**単位インパルス関数**（前回出てきた**デルタ関数**）を入力した場合を考えます。

式（4）において、$x(t)$にデルタ関数 $\delta(t)$を代入して、デルタ関数の性質と偶関数であることを利用して；

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=h(t) \quad \text{................}\ (6)$$

；と、出力信号 $y(t)$は $h(t)$そのものとなります。

図 1 の線形系における $h(t)$は、系に単位インパルス関数を入力した出力ですので、**インパルス応答**と呼ばれます。

この畳み込みとフーリエ変換との最も重要な関係について述べます。

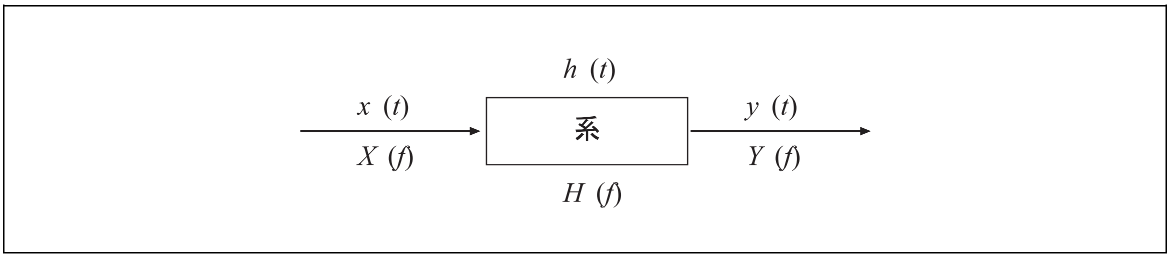

図 4　線形系における時間関数とそのフーリエ変換

図 4 のように、時間関数 $x(t)$、$h(t)$、$y(t)$のフーリエ変換をそれぞれ $X(f)$、$H(f)$、$Y(f)$とします。時間軸上で畳み込みの関係のある関数は、周波数軸上でどのような関係となるか考えてみましょう。

式（1）の両辺をフーリエ変換すると；

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt \qquad \text{.................................} \quad (7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau \qquad \text{.................................} \quad (8)$$

時間関数 $h(t)$を－τ だけ時間推移した関数のフーリエ変換は、元の関数のフーリエ変換と $e^{-j2\pi ft}$ との積に等しいので、［　］内は $e^{-j2\pi ft}H(f)$ とおけるので、式（8）は；

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi ft} H(f) d\tau = X(f) H(f) \qquad \text{.................................} \quad (9)$$

2 つの関数 $x(t)$と $h(t)$の畳み込み $y(t)$のフーリエ変換は、元の関数のフーリエ変換の積に等しくなります。この関係を**畳み込み定理（convolution theorem）**と呼びます。逆も成り立ちますので、⇔ でフーリエ変換と逆フーリエ変換を表すとすると、式（10）のようなフーリエ変換対となります。

$$x(t) * h(t) \Leftrightarrow X(f) H(f) \qquad \text{...............................} \quad (10)$$

後述することになりますが、FFT アナライザではこの関係を利用して、周波数応答関数やインパルス応答などを算出しています。

全く同様にして、周波数軸上での 2 つの関数の畳み込みの逆フーリエ変換は、元の時間関数の積に等しくなります。式（10）と同じ表記をすると；

$$x(t)h(t) \Leftrightarrow X(f) * H(f) \qquad \text{............................... （11）}$$

これは、フーリエ変換演算の対称性により、明らかでしょう。式（11）を、**周波数畳み込み定理（frequency convolution theorem）**と呼ぶことがあります。

この関係は、FFT アナライザにおける窓関数などの説明において重要な定理です。

最後に、式（11）において、2 つの時間関数を両方とも $x(t)$とおくと、左側は $x^2(t)$のフーリエ変換となるので、新変数を k とすると；

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) e^{-j2\pi kt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X(k-f) df \qquad \text{............................... （12）}$$

となります。ここで、$k = 0$ とおくと、結局；

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df \qquad \text{............................... （13）}$$

の関係が得られます。この関係を**パーセバルの定理（Parseval’s theorem）**と呼びます。式（13）の物理的な意味は、時間軸上の全エネルギーは、周波数軸上の全エネルギーに等しいという当たり前のことを言っています。その意味で、$|X(f)|^2$ は**エネルギースペクトル**と呼ぶことができます。

最後に、まとめです。

(1) 2つの時間関数の畳み込み積分は、式（1）または式（3）で定義されます。

(2) インパルス応答 $h(t)$ の線形系に $x(t)$ を入力すると、その出力は $h(t)$ と $x(t)$ との畳み込みとなります。

(3) 2つの関数 $x(t)$ と $h(t)$ の畳み込み $y(t)$ のフーリエ変換は、元の関数のフーリエ変換の積に等しくなります。［畳み込み定理（式（10））］

(4) 周波数軸上での 2 つの関数の畳み込みの逆フーリエ変換は、元の時間関数の積に等しくなります。［周波数畳み込み定理（式（11））］

(5) 時間軸上の全エネルギーは、周波軸上の全エネルギーに等しくなります。［パーセバルの定理（式（13））］

【キーワード】
畳み込み（convolution）、畳み込み積分（convolution integral）、線形系、単位インパルス関数、デルタ関数、インパルス応答、畳み込み定理（convolution theorem）、周波数畳み込み定理（frequency convolution theorem）、パーセバルの定理（Parseval’s theorem）、エネルギースペクトル

【参考資料】

1. 「スペクトル解析」日野幹雄著　朝倉書店
2. 「高速フーリエ変換」E. ORAN BRIGHAM 著　科学技術出版社
3. 「フーリエ解析」H.P.スウ著　佐藤平八訳　森北出版

以上

（Hima）