

## 減衰をあらわす係数

減衰振動や制振材料などの減衰特性を表すパラメータに、減衰比（ダンピングファクター）、対数減衰率、損失係数が使用されている。

これらパラメータの求め方、その意味について説明する。

### （１）対数減衰率

図１のような減衰自由振動波形の隣り合う振幅の比の自然対数をとったものを対数減衰率という。

時刻  $t_n$  における  $n$  番目の振幅  $a_n$ 、同様に  $n+1 \dots n+m$  番目の振幅を  $a_{n+1}, \dots, a_{n+m}$  とすると 対数減衰率 は

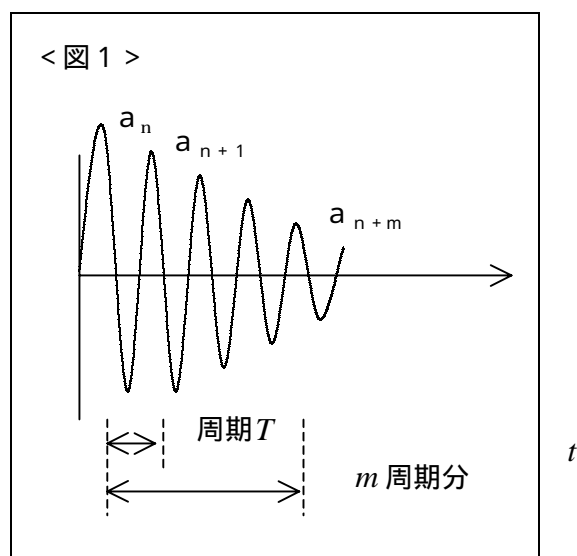
$$\delta = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \ln \frac{a_{n+m-1}}{a_{n+m}} \quad (\text{式 1})$$

$m$  周期分を考えると、

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \times \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \times \dots \times \frac{a_{n+m-1}}{a_{n+m}} = m\delta \quad (\text{式 2})$$

よって

$$\delta = \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{a_n}{a_{n+m}} \quad (\text{式 3})$$



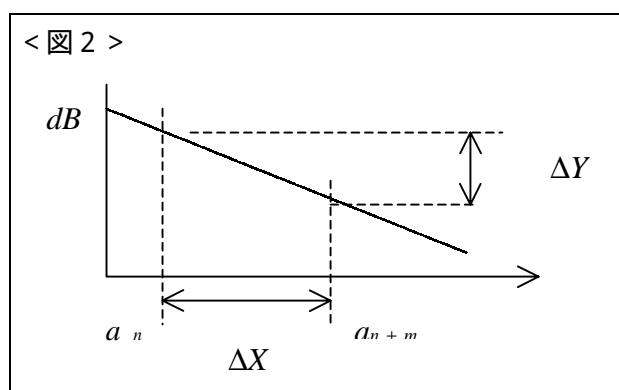
### （２）ヒルベルト変換より $\delta$ を求める

図 1 の振幅の包絡線を求めるには、FFT アナライザのヒルベルト変換が利用される。

図 1 の包絡線の常用対数 ( $= 10 \text{Log} a_n^2 = 20 \text{Log} a_n$ )

をとって表示したものが図 2 である。

図 2 の 2 点間の差を  $\Delta X, \Delta Y$  とすると



$$\delta = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \times \frac{\ln 10}{20} \times \frac{1}{f_0} = 0.1151 \times \frac{\Delta Y}{\Delta X} \times \frac{1}{f_0} \quad (\text{式 4})$$

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

< 証明 >

図 1 より  $\Delta X$  をサイクル数  $m$  で表すと

$$m = \frac{\Delta X}{T} = \Delta X \cdot f_0 \quad (\text{式 5})$$

また、

$$\begin{aligned} m\delta &= \ell_n \frac{a_n}{a_{n+m}} \\ &= \ell_n 10 \cdot \log_{10} \frac{a_n}{a_{n+m}} = \ell_n 10 \cdot \frac{1}{20} \cdot \left\{ 20 \cdot \log_{10} \frac{a_n}{a_{n+m}} \right\} \\ &= \ell_n 10 \cdot \frac{1}{20} \cdot \{ 20 \cdot \log_{10} a_n - 20 \cdot \log_{10} a_{n+m} \} \\ &= \ell_n 10 \cdot \frac{1}{20} \cdot \Delta Y \end{aligned} \quad (\text{式 6})$$

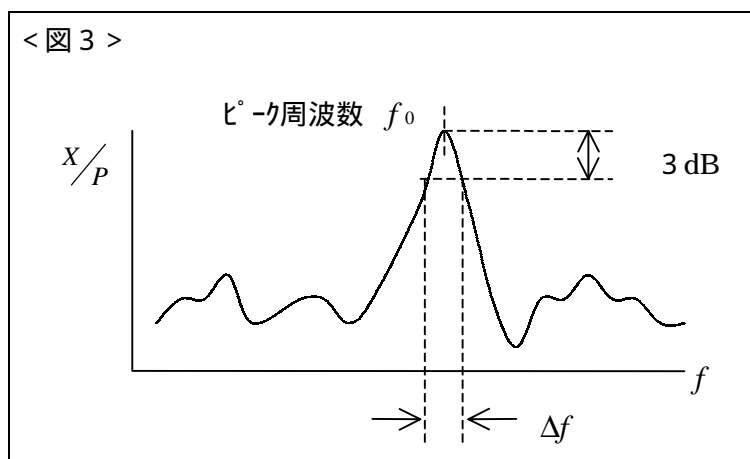
よって

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{m} \ell_n \frac{a_n}{a_{n+m}} \\ &= \frac{1}{\Delta X} \frac{1}{f_0} \frac{\Delta Y}{20} \ell_n 10 \\ &= \frac{\Delta Y}{\Delta X} \frac{\ell_n 10}{20} \frac{1}{f_0} \end{aligned} \quad (\text{式 7})$$

### (3) 半値幅法より減衰比を求める

図3のように振幅応答より $\pi$ - $\kappa$ 点の周波数 $f_0$ と、 $\pi$ - $\kappa$ 点より半値(-3 dB)下がった点の周波数幅 $\Delta f$ から、式8より損失係数と減衰比を求めることができる。

(式8)

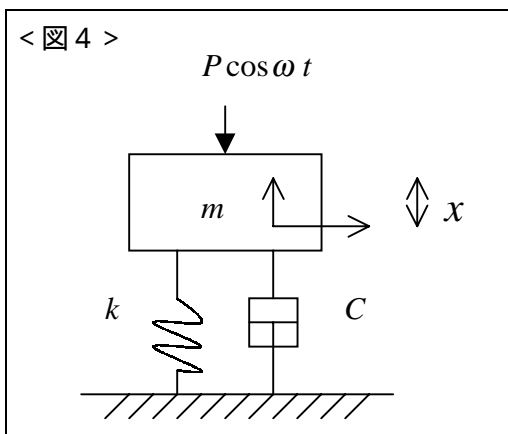


減衰比、対数減衰率は構造物の振動特性を、損失係数は防振材等の評価指数として利用されている。対数減衰率を求めるこれらの方法は強制振動の振動応答より導かれているので、強制振動に付いてこれらの関連性をみていくこととする。

### (4) 強制振動 力と変位

自動車等に強制的に余弦波の加振力 $P \cos \omega t$ を加えた場合、簡単なモデルとして図4に示す。これは振動が上下の1軸なので、1自由度の振動と言う。

振動に関する重要な記号を次に示す。

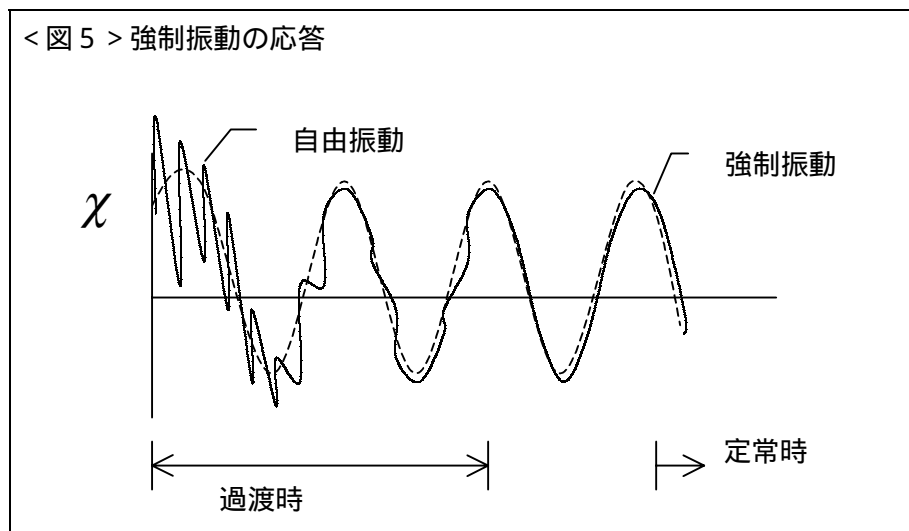


$x$  : 変位  
 $m$  : 質量  
 $k$  : ハネ定数  
 $C$  : 粘性減衰係数  
 $C_c$  : 臨界粘性係数  
 $f_0$  : 固有周波数  
 $\omega_0$  :  $2\pi f_0$   
 $\zeta$  : 減衰比  
 $X_{st}$  : 静的変位

また、関係式は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{C}{C_c} \quad C_c = 2\sqrt{mk} \quad X_{st} = \frac{P}{k} \quad (\text{式 9})$$

図 4 は粘性減衰を持った強制振動の運動として、力と変位の関係でを現わしている。その振動変位の概様を図 5 に示す。



この運動方程式は

$$m\ddot{\chi} + C\dot{\chi} + k\chi = P \cos \omega t \quad (\text{式 10})$$

この解は  $\chi = (\text{過渡項}) + (\text{定常項})$  の形で求めることができる。

過渡項は図 1 の自由減衰振動に相当し、時間とともに減衰していく応答となり、これを過渡応答という。図 5 の過渡時の応答は自由減衰振動と定常（強制）振動の合わさった応答となっている。

定常項は力  $P \cos \omega t$  で強制的に振動させられる応答で、自由（過渡）振動が消滅した後の、定常的に発生する強制振動応答である。

#### 過渡項

静的変位  $\chi_{st}$  を与え、急に開放した後の自由振動に相当し、式 10 の  $P = 0$  として得られる解で、

< 1 の場合は式 11 となる。

$$\chi = a e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_0 t + \theta) \quad (\text{式 11})$$

初期条件  $t=0$  で  $\chi = a_0$   $\dot{\chi} = v_0$   $\theta$  は初期位相とすると

$$a = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{1-\zeta^2} \left( \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} + a_0 \zeta \right)^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{-1}{a_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \left( \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} + a_0 \zeta \right) \quad (\text{式 12})$$

$\zeta < 1$  なら自由減衰振動の波形の図 1 になり、振幅の包絡線、振動角周波数は式 13 で表される。

$$\chi = a e^{-\zeta \omega_0 t} \quad \omega = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_0 \quad (\text{式 13})$$

#### 定常項

定条項は力  $P \cos \omega t$  が働いた、強制振動状態（定常状態）に相当し、 $\chi$  の過渡状態が時間とともに十分減衰し、定常の振動になった状態に相当する。

この解の形を  $\chi = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  とおいて、 $A, B$  を求めると

$$\frac{A}{P/k} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + \{2\zeta(\omega/\omega_0)\}^2} \quad (\text{式 14})$$

$$\frac{B}{P/k} = \frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + \{2\zeta(\omega/\omega_0)\}^2} \quad (\text{式 15})$$

$\chi = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  を  $\chi = \chi_0 \cos(\omega t - \phi)$  の形にまとめると

$$\frac{\chi_0}{P/k} = \frac{\chi_0}{\chi_{st}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{P/k} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + (2\zeta \omega/\omega_0)^2}} \quad (\text{式 16})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A} = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (\text{式 17})$$

式 16 は振幅倍率と言われ強制振動の振幅応答を表す。

これは強制振動中の変位振幅  $\chi_0$  と静的力  $P$  がかった時の変位  $\chi_{st} = P/k$  の比である。

また式 17 は力に対する変位の位相遅れを表す。

式 10 の完全解は

$$\chi = a e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_0 t - \theta) + \frac{P/k}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + (2\zeta \omega/\omega_0)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{式 18})$$

これは図 5 の波形を式で表したものと見える。

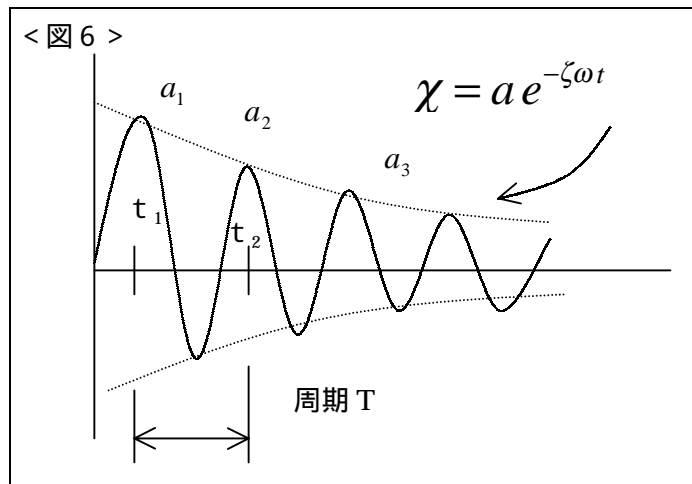
(5) 式10の過渡項を見ていく。

$$\chi = a e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_0 t + \theta) \tag{式19}$$

$0 < \zeta < 1$  のとき

図6の実線のように振幅は次第に小さくなりやがて停止する減衰振動である  
式12は点線の包絡線を表す。

$$\chi = a e^{-\zeta \omega_0 t} \quad \omega = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_0 \tag{式20}$$



$\sqrt{1-\zeta^2}$  は1より小さい値であり、減衰振動の周波数  $\omega$  は固有周波数  $\omega_0$  の  $\sqrt{1-\zeta^2}$  倍になる。その周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{式21}$$

と  $1/\sqrt{1-\zeta^2}$  倍長くなる。

また、減衰振動の各振幅比は

$$\frac{a_1}{a_2} = \left( \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots \right) = \frac{e^{-\zeta \omega_0 t_1}}{e^{-\zeta \omega_0 (t_1+T)}} = e^{\zeta \omega_0 T} \tag{式22}$$

この振幅比の自然対数をとったものが対数減衰率と言ひ  $\delta$  とすると、式21、22より

$$\delta = \ln \frac{a_1}{a_2} = \zeta \omega_0 T = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{式23}$$

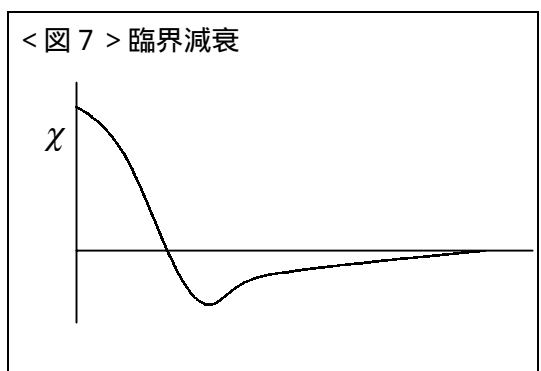
$\zeta \ll 1$  なら

$$\delta = 2\pi \zeta \tag{式24}$$

と減衰比に  $2\pi$  をかけた値になる。

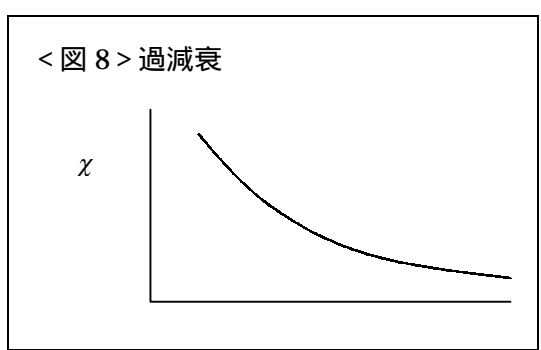
$\zeta = 1$  のとき

この時は  $C = C_c$  の時の現象で、この状態を臨海減衰と言ひ  
図7のようになる。



$\zeta > 1$  のとき

この時は  $C > C_c$  の状態で、図8のように変位は振動しないで、次第に減衰する非周期運動となる。  
この状態を過減衰と言う。



(6) 定常(強制)項を見ていく  
力  $P \cos \omega t$  で継続して加振したときの変位は

$$\chi = \frac{\chi_{st}}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (2\zeta \omega/\omega_0)^2}} \cos(\omega t - \phi) \tag{式 25}$$

静的変位  $\chi_{st}$  との振幅の比及び力と変位の位相差  $\phi$  は式 16、17 で表される。

$$\frac{\chi_0}{P/k} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{P/k} = \frac{\chi_0}{\chi_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + (2\zeta \omega/\omega_0)^2}} \tag{式 26}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A} = \tan^{-1} \frac{2\zeta \omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \tag{式 27}$$

式 16 を変位振幅倍率と言う。この値を対数にとって図 9 に示す。

この特徴は

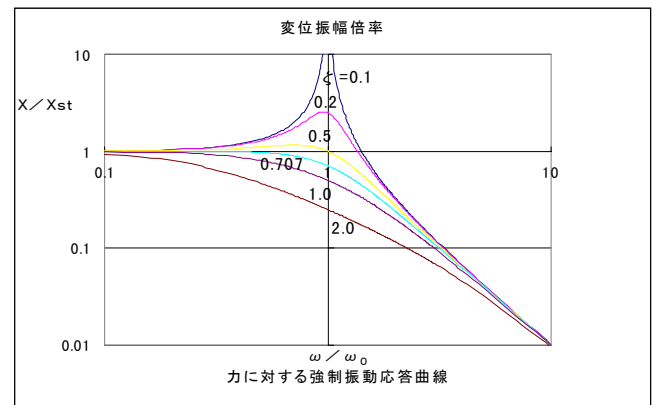
$\omega/\omega_0$  が小さいところでは  
 $\chi/\chi_{st} = 1$  になる。

$\omega/\omega_0$  が大きいところでは

$$\chi/\chi_{st} = 1/(\omega/\omega_0)^2 \text{ になる。}$$

これは  $\omega/\omega_0$  が 10 倍になる毎に -40 dB  
( $= 20 \text{Log} 1/(\omega/\omega_0)^2$ ) の傾斜になる。

< 図 9 > 変位振幅倍率



共振周波数は  $\zeta$  が大きいほど左にずれる。

$$\omega/\omega_0 = f/f_0 = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{式 28}$$

共振時の振幅倍率は最大値となり、この値を  $\chi_{max}/\chi_{st}$  とすると 式 26、28 より

$$\frac{\chi_{max}}{\chi_{st}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{式 29}$$

$\zeta \ll 1$  では

$$\frac{\chi_{max}}{\chi_{st}} = \frac{1}{2\zeta} \tag{式 30}$$

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{式 31}$$

と共振周波数は固有周波数に一致する。

$\zeta \geq 1/\sqrt{2}$  以上になると共振は存在しない。

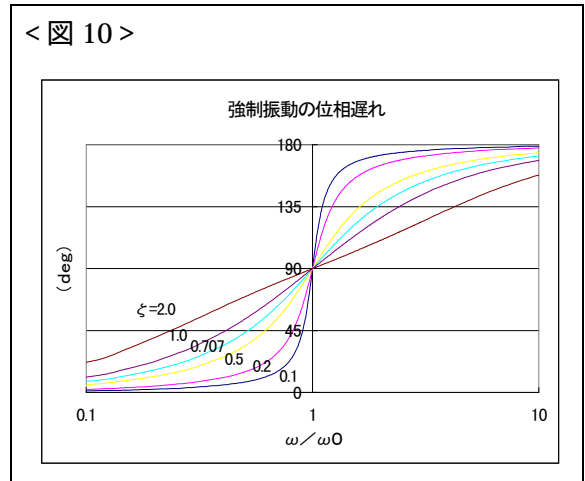
位相差

図 10 は力と変位の位相差を表す。

位相差  $\phi$  は  $\omega/\omega_0$  が小さいと  $0^\circ$ 、 $\omega/\omega_0 = 1$  で  $90^\circ$ 、 $\omega/\omega_0$  が大きくなると  $180^\circ$  に収束する。

$\zeta$  が大きいほど  $\phi$  の変化は緩やかで、 $\zeta$  が小さいと  $\omega/\omega_0 = 1$  のところで急に变化する。

これは次に説明の Q 値が高いと共振点で位相が急変することを意味する。



(式 32)

Q 値

Q 値は共振の鋭さを現す量として用いられ

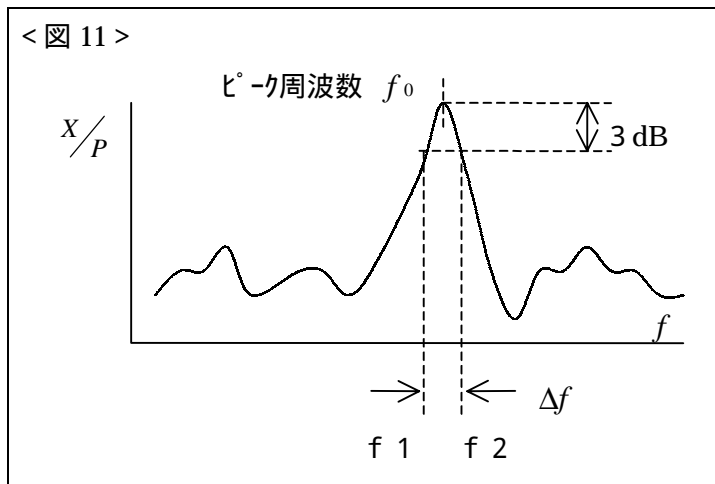
$$\frac{\chi_{\max}}{\chi_{st}} = \frac{1}{2\zeta} = Q$$

として共振時の振幅倍率で定義される。

Q 値を求める方法として共振曲線の最大振幅から -3dB の点の周波数帯域幅  $\Delta f = f_2 - f_1$  を求め、 $\Delta f$  と共振周波数  $f_0$  との比として求めることができる。

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

(式 33)



最大振幅から -3dB の位置と言うのは振幅が  $1/\sqrt{2}$  エネルギーで  $1/2$  に当たるため、この方法で求めることを半値幅法と言う。

また、 $1/Q$  を損失係数と呼び減衰を表す量として用い、記号  $\eta$  がよく使われる。

$$\eta = \frac{1}{Q} = 2\zeta$$

(式 34)

< 半値幅法の証明 >

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad \zeta = 1 \quad \text{の証明}$$

共振曲線の最大値  $\chi_{\max}$  の  $1/\sqrt{2}$  つまり  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\chi_{\max}}{\chi_{st}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2\zeta}$  における共振曲線の周波数

$f_1, f_2$  を求める。

式 16 より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\chi_{\max}}{\chi_{st}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_0)^2 + (2\zeta \omega/\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2\zeta}$$

整理すると

$$(\omega/\omega_0)^4 - 2(1 - 2\zeta^2)(\omega/\omega_0)^2 + (1 - 8\zeta^2) = 0$$

$$\omega/\omega_0 = \sqrt{1 \pm 2\zeta \sqrt{1 + \zeta^2} - 2\zeta^2} = \sqrt{1 \pm 2\zeta} \sqrt{(1 \pm \zeta)^2} = 1 \pm \zeta \quad \zeta \ll 1$$

よって  $f_1$ 、 $f_2$  は

$$f_1 = (1 - \zeta)f_0 \quad f_2 = (1 + \zeta)f_0$$

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{(1 + \zeta)f_0 - (1 - \zeta)f_0} = \frac{1}{2\zeta}$$

(7) 関係式のまとめ

減衰を表わす量の相互関係をまとめて下記に示す。

$\zeta \ll 1$  のとき、

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2Q} = \frac{\Delta f}{2f_0} \quad \text{(式 35)}$$

$$\zeta = \frac{C}{C_c} \quad \text{減衰比 (ダンピングファクター)}$$

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{a_{n+m}}{a_n} = 0.1151 \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right| \cdot \frac{1}{f_0} = \frac{1}{Q \Delta} \quad \text{対数減衰率}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{f_0}{\Delta f} \quad \text{Q 値 (共振の鋭さ)}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{固有振動数}$$

$$\eta = \frac{1}{Q} = 2\zeta \quad \text{損失係数}$$

さて、 $\omega/\omega_0$  を変化させた特性曲線を見てきたが、実際にかかる力は、複数の周波数が合成した複雑な波形である。それから起こる変位振動も複数の周波数の合成されたものとなる。言い換えると複雑な振動波形もそれぞれ個々の周波数の振動が合わさったものと考えることが出来る。この場合を調和振動と言う。

複数の周波数の合成波形は FFT アナライザでその成分を簡単に分析することが可能である。損失係数を求めるための共振曲線も FFT アナライザと加振機による 変位 / 力の周波数応答関数を測定する

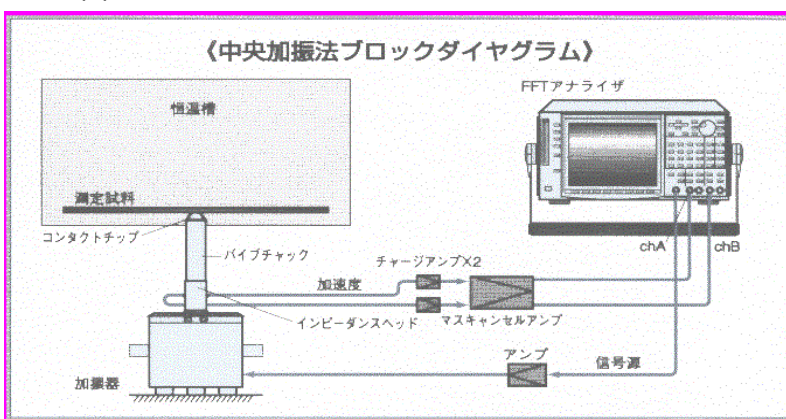


ことで求めることができる。

図 12 は損失係数測定のための構成例を示す。

試験片と加振機との接点に加振力測定のためのセンサーであるインピーダンスヘッドと加速度センサーを組み込んである。加振機をサインスイープしながら、加速度/力の周波数応答を測定する。まず試験片を付けない状態で加振し取り付け治具等のマス分の影響を測定し、次に試験片を取り付け、マスキャンセルしながら損失係数測定を行なう。

< 図 12 >



周波数応答関数は入力信号と応答信号の比を入力信号の周波数に対して表したもので、入力信号に力、応答信号に加速度、速度、変位のいずれかを用いる。

応答信号により表 1 のように分類されるが、周波数応答関数の共振ピークの対称性から機械インピーダンス、モビリティが最適である。

動質量、機械インピーダンス、動剛性の測定は FFT アナライザの信号接続で入力信号側に加速度、速度、変位を出力側に力を接続する。

図 13 は図 12 で測定した機械インピーダンスのデータ例で、力/加速度を 1 重積分して求めている。このデータのピーク点から半値幅法にて損失係数を求めるのが一般的である。

< 表 1 > 周波数応答関数の分類

| 定義    | 呼称        | コンプライアンス G との関係   | 単位 (SI)        |
|-------|-----------|-------------------|----------------|
| 加速度/力 | 付ダズ       | $(j\omega)^2 G$   | $m s^{-2} / N$ |
| 速度/力  | モビリティ     | $j\omega G$       | $m s^{-1} / N$ |
| 変位/力  | コンプライアンス  | $G$               | $m s / N$      |
| 力/加速度 | 動質量       | $1/(j\omega)^2 G$ | $N / m s^{-2}$ |
| 力/速度  | 機械インピーダンス | $1/j\omega G$     | $N / m s^{-1}$ |
| 力/変位  | 動剛性       | $1/G$             | $N / m$        |

< 図 13 >

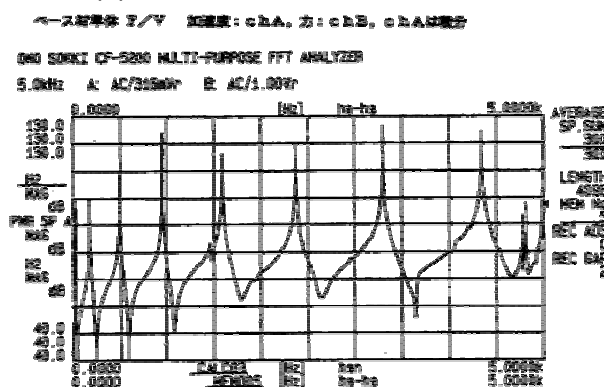


図 12 ベース材単体 F/V 加速度:ch A、力:ch B、ch Aは積分

( 5 ) 加速度、速度、変位の関係

加速度  $\alpha$  と速度  $v$ 、変位  $\chi$  の関係は積分 ( $1/j\omega$ )、微分 ( $j\omega$ ) の関係にあり FFT の微分積分機能をつかうことにより表 1 の値を切り替え表示することは簡単に可能である。

周波数軸上では

$$1 \text{ 重、2 重積分は } 1 / (2 \pi f)^2 \quad 1 / (2 \pi f)^2$$

$$1 \text{ 回、2 回微分は } (2 \pi f)^2 \quad (2 \pi f)^2$$

をかけ算する。

( 例 ) 加速度  $10m/s^2$  20Hz のとき

$$v = 10 / (2\pi \cdot 20) = 0.0796 \quad (m/s)$$

$$\chi = 10 / (2\pi \cdot 20)^2 = 6.33 \times 10^{-4} \quad (m)$$