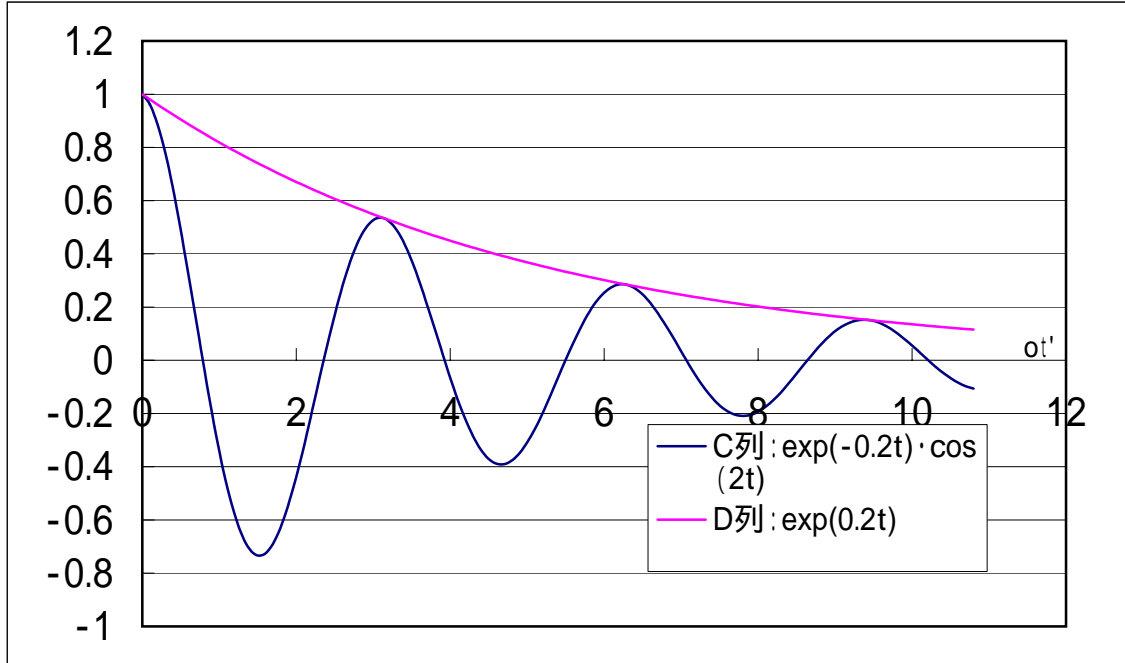


A列	B列	C列	D列	E列	
A	X軸 t = 2	減衰波形 fo*A/64	振幅エンベロープ exp(-0.2t) · cos(2t)	振幅エンベロープ exp(0.2t)	20Log(exp(0.2t)) 振幅エンベロープ(dB)
0	0	1	1	0	
1	0.09817477	0.961715437	0.980556556	-0.170547044	
2	0.196349541	0.888302003	0.96149116	-0.341094088	
3	0.294524311	0.783906607	0.94279646	-0.511641133	
4	0.392699082	0.653695648	0.92446525	-0.682188177	
5	0.490873852	0.503619117	0.906490462	-0.852735221	
6	0.589048623	0.340153973	0.888865166	-1.023282265	
7	0.687223393	0.170037323	0.871582566	-1.19382931	
8	0.785398163	5.23528E - 17	0.854635999	-1.364376354	
9	0.883572934	-0.163489383	0.838018932	-1.534923398	
10	0.981747704	-0.314460527	0.821724958	-1.705470442	
11	1.079922475	-0.44764949	0.805747795	-1.876017487	
12	1.178097245	-0.558671833	0.790081283	-2.046564531	
13	1.276272016	-0.644155624	0.774719382	-2.217111575	
14	1.374446786	-0.701830786	0.759656169	-2.387658619	
15	1.472621556	-0.730573065	0.744885837	-2.558205663	
16	1.570796327	-0.730402691	0.730402691	-2.728752708	
17	1.668971097	-0.702439543	0.716201147	-2.899299752	
18	1.767145868	-0.648818174	0.702275731	-3.069846796	
19	1.865320638	-0.572567496	0.688621072	-3.24039384	
20	1.963495408	-0.47746106	0.675231907	-3.410940885	
21	2.061670179	-0.367844759	0.662103073	-3.581487929	
22	2.159844949	-0.248449377	0.649229509	-3.752034973	
23	2.25801972	-0.124195719	0.636606252	-3.922582017	
24	2.35619449	-1.14716E - 16	0.624228434	-4.093129062	
25	2.454369261	0.119413086	0.612091283	-4.263676106	
26	2.552544031	0.229682815	0.600190121	-4.43422315	
27	2.650718801	0.326964392	0.588520358	-4.604770194	
28	2.748893572	0.40805541	0.577077495	-4.775317238	
29	2.847068342	0.470493001	0.565857121	-4.945864283	
30	2.945243113	0.512619095	0.55485491	-5.116411327	
31	3.043417883	0.533612532	0.54406662	-5.286958371	
32	3.141592654	0.533488091	0.533488091	-5.457505415	
33	3.239767424	0.513063733	0.523115245	-5.62805246	
34	3.337942194	0.47389854	0.512944083	-5.798599504	
35	3.436116965	0.41820484	0.502970684	-5.969146548	
36	3.534291735	0.348738843	0.493191202	-6.139693592	
37	3.632466506	0.268674802	0.483601866	-6.310240637	
38	3.730641276	0.181468093	0.474198981	-6.480787681	
39	3.828816047	0.090712887	0.464978919	-6.651334725	
40	3.926990817	1.39648E - 16	0.455938128	-6.821881769	
41	4.025165587	-0.087219639	0.44707312	-6.992428813	
42	4.123340358	-0.167760946	0.438380479	-7.162975858	
43	4.221515128	-0.238815672	0.429856853	-7.333522902	
44	4.319689899	-0.29804477	0.421498955	-7.504069946	
45	4.417864669	-0.343649354	0.413303564	-7.67461699	
46	4.51603944	-0.374418366	0.40526752	-7.845164035	
47	4.61421421	-0.38975203	0.397387723	-8.015711079	
48	4.71238898	-0.389661137	0.389661137	-8.186258123	
49	4.810563751	-0.374743131	0.382084783	-8.356805167	
50	4.908738521	-0.346136769	0.374655739	-8.527352212	
51	5.006913292	-0.30545794	0.367371141	-8.697899256	

52	5.105088062	-0.25471979	0.360228181	-8.8684463
53	5.203262833	-0.196240798	0.353224105	-9.038993344
54	5.301437603	-0.132544784	0.346356211	-9.209540388
55	5.399612373	-0.066256937	0.339621854	-9.380087433
56	5.497787144	-1.42799E - 16	0.333018435	-9.550634477
57	5.595961914	0.063705459	0.32654341	-9.721181521
58	5.694136685	0.122533047	0.320194282	-9.891728565
59	5.792311455	0.174431609	0.313968602	-10.06227561
60	5.890486225	0.217692702	0.307863971	-10.23282265
61	5.988660996	0.251002413	0.301878035	-10.4033697
62	6.086835766	0.273476182	0.296008487	-10.57391674
63	6.185010537	0.284675931	0.290253062	-10.74446379
64	6.283185307	0.284609543	0.284609543	-10.91501083
65	6.381360078	0.273713391	0.279075754	-11.08555787
66	6.479534848	0.252819227	0.27364956	-11.25610492
67	6.577709618	0.223107302	0.26832887	-11.42665196
68	6.675884389	0.18604802	0.263111633	-11.59719901
69	6.774059159	0.143334807	0.257995836	-11.76774605
70	6.87223393	0.096811067	0.252979509	-11.9382931
71	6.9704087	0.048394245	0.248060716	-12.10884014
72	7.068583471	1.34101E - 16	0.243237561	-12.27938718
73	7.166758241	-0.046530639	0.238508186	-12.44993423
74	7.264933011	-0.089498467	0.233870765	-12.62048127
75	7.363107782	-0.127405317	0.229323512	-12.79102832
76	7.461282552	-0.159003335	0.224864673	-12.96157536
77	7.559457323	-0.183332838	0.220492529	-13.13212241
78	7.657632093	-0.19974774	0.216205395	-13.30266945
79	7.755806864	-0.207928066	0.212001618	-13.47321649
80	7.853981634	-0.207879576	0.207879576	-13.64376354
81	7.952156404	-0.199920998	0.203837681	-13.81431058
82	8.050331175	-0.184659844	0.199874375	-13.98485763
83	8.148505945	-0.162958173	0.195988129	-14.15540467
84	8.246680716	-0.135889974	0.192177445	-14.32595172
85	8.344855486	-0.104692129	0.188440853	-14.49649876
86	8.443030257	-0.070711064	0.184776914	-14.6670458
87	8.541205027	-0.035347287	0.181184215	-14.83759285
88	8.639379797	-4.35304E - 16	0.177661369	-15.00813989
89	8.737554568	0.033986104	0.174207021	-15.17868694
90	8.835729338	0.065369921	0.170819836	-15.34923398
91	8.933904109	0.093057186	0.16749851	-15.51978102
92	9.032078879	0.116136464	0.164241762	-15.69032807
93	9.130253649	0.133906798	0.161048337	-15.86087511
94	9.22842842	0.145896287	0.157917003	-16.03142216
95	9.32660319	0.151871219	0.154846552	-16.2019692
96	9.424777961	0.151835802	0.151835802	-16.37251625
97	9.522952731	0.146022835	0.148883591	-16.54306329
98	9.621127502	0.134876047	0.145988781	-16.71361033
99	9.719302272	0.119025088	0.143150257	-16.88415738
100	9.817477042	0.099254403	0.140366923	-17.05470442
101	9.915651813	0.076467413	0.137637706	-17.22525147
102	10.01382658	0.051647551	0.134961555	-17.39579851
103	10.11200135	0.025817753	0.132337438	-17.56634556
104	10.21017612	-1.2717E - 16	0.129764342	-17.7368926
105	10.30835089	-0.024823542	0.127241277	-17.90743964
106	10.40652567	-0.047746366	0.124767268	-18.07798669
107	10.50470044	-0.067969219	0.122341363	-18.24853373
108	10.60287521	-0.084826386	0.119962625	-18.41908078
109	10.70104998	-0.097805886	0.117630139	-18.58962782
110	10.79922475	-0.10656304	0.115343004	-18.76017487

(1) $\exp(0.2t)\cos(2t)$ のグラフ

$\exp(-nt)\cos(2t) \dots (1)$
 のグラフを書くにあたり 計算しやすくするため
 $t=2 \text{ } \omega t'$ と変数変換し、周波数は $n=2 \text{ } \omega=2 \times 2 \text{ } \omega t'$ にとって、
 $\exp(0.2t)\cos(2t)$
 をグラフ表示しました。位相遅れは0です。
 X軸は n に対し1/32周期毎の計算です。



(2) 1自由度系の基本式

振動減衰波形の運動方程式: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$
 運動方程式を減衰定数、固有振動数 $n(2 \text{ } f_n)$ として表すと:
 $x'' + 2 \text{ } n x' + n^2 = 0$
 運動方程式の解(基本式): $\exp(-nt)\cos(2nt + \text{)}$
 減衰比、対数減衰率、減衰定数の関係式:
 減衰比 $= x_1/x_2 = \exp(-nT_d)$
 対数減衰率 $= \ln(x_1/x_2) = -nT_d$
 $= -2 \text{ } (\text{ } 1 \text{ の場合})$
 $k/m = n^2$
 $C_c = 2m \text{ } n (= \text{ } / (2 \text{ }))$
 $= \text{減衰定数} = c/C_c$
 $T_d = 1 \text{ 周期の時間} (1/f_n)$

(3) グラフの値から逆算して、対数減衰率および元の式を求める

図1の波形が、FFTアナライザで測定できたとして、
 振幅ピーク値から逆算して、対数減衰率を求め、元の減衰式を算出してみます。
 次の表の「振幅ピーク値」を読みとって、(2)項の基本式に当てはめて計算スタートです。

振幅ピーク値/ 計算式	周期 T_d $X_0 - X_1$	減衰比 x_1/x_0 $e^{\text{ }}$	対数減衰率 $\ln(e^{\text{ }})$	減衰定数 $/ (2 \text{ })$
x_0 (C列1)	1			
x_1 (C列32)	0.533488	0.466512	0.533488091	-0.6283185
x_2 (C列64)	0.28461	0.248879	0.533488091	
x_3 (C列96)	0.151836	0.132774	0.533488091	

$T_d = 1/f_n$ より
 $n = 2 \text{ } f_n = 2 \text{ } / T_d$ を求めます
 上表より求められた 減衰定数 $= 0.1$ 及び周波数 n 、位相差 0 を
 運動方程式の解の式に代入すると
 $\exp(-0.1 \text{ } nt)\cos(2 \text{ } nt)$
 グラフのX軸のとり方から $nt=2 \text{ } \omega t'$ と変数変換すると上式は

$\exp(-0.2 \text{ } \omega t') \cos(2 \text{ } \omega t')$
 さらに $\omega t' = t$ と変換して
 $\exp(-0.2t) \cos(2t)$
 よって、グラフを書かせた(1)項の式が求められました。

(4) ヒルベルト変換から減衰比を求める

n 周期の比を考えると

$$X1/Xn = (x1/x2) * (X2/x3) * \dots * (xn-1/xn) = (e^{\lambda})^n = \exp(n \lambda)$$

よって $\lambda = 1/n * \ln(x1/xn)$

又公式 $\ln M = \text{Log} M / \text{Log} e$ (Logは低が10の常用対数) より

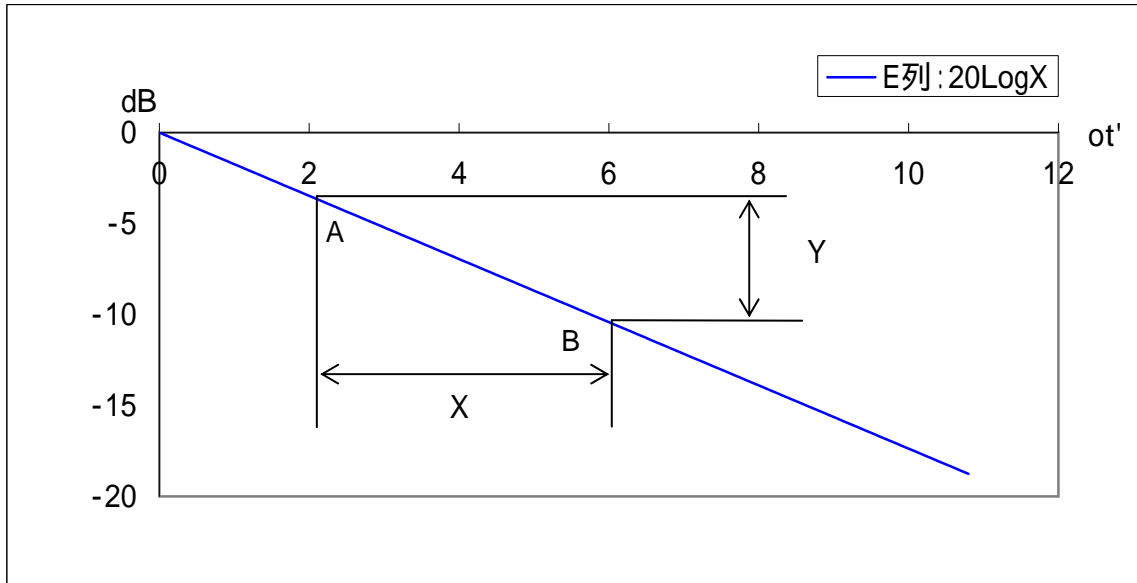
$$= 1/n \ln(x1/xn) = 1/n * \{ \ln x1 - \ln xn \} = 1/n * 20/20 * \{ \text{Log} X1 - \text{Log} X2 \} / \text{Log} e$$

$$= \{ (20 \text{Log} X1 - 20 \text{Log} Xn) / n \} / (20 * \text{Log} e)$$

$$= \{ Y / X \} / (20 \text{Log} e)$$

但し $n = X$

よって Y、X を測定されたヒルベルト変換の対数表示 (下図) から求めることができます。



任意の Y、X より λ を求めた例を下表に示します。
求めた値は(3)項と同じになります。

例1

A、Bポイントのデータ	Y	$(20 \log x2 - 20 \log x3) / n$	
		Y/ X	
20Log(x2) E列64 -10.915	5.457505415	5.45750542	0.628319
20Log(x3) E列96 -16.3725			

$$X = (B \text{列} 96 - B \text{列} 64) / 1 \text{周期} = (A \text{列} 96 - A \text{列} 64) / 32 \quad (1 \text{周期} 32)$$

例2

A、Bポイントのデータ	Y	$(20 \log x2 - 20 \log x3) / n$	
		Y/ X	
20Log(xi) E列37 -6.31024	-8.527352212	-5.4575054	-0.62832
20Log(xk) E列87 -14.8376			

$$X = (B \text{列} 87 - B \text{列} 37) / 1 \text{周期} = (A \text{列} 87 - A \text{列} 37) / 32 \quad (1 \text{周期} 32)$$